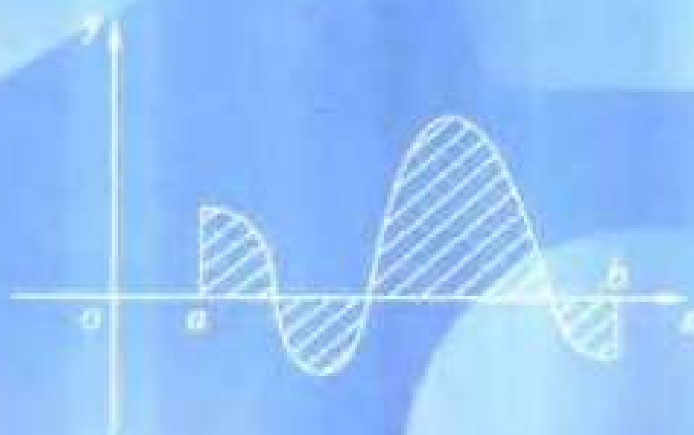
积分方程

（第二版）

沈以淡　编著



北京理工大学出版社

积分方程

（第二版）

沈以淡　编著

北京理工大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

积分方程/沈以淡编著. —2版. —北京：北京理工大学出版社，2002.6

ISBN 7-81013-437-X

Ⅰ. 积…　Ⅱ. 沈…　Ⅲ. 积分方程-高等学校-教材　Ⅳ. O175.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第017707号

出版发行/北京理工大学出版社

社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号

邮　　编/100081

电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)[illegible]

网　　址/http://www.bitpress.com.cn

电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn

经　　销/全国各地新华书店

印　　刷/北京地质印刷厂

装　　订/天津高村装订厂

开　　本/787毫米×1092毫米　1/16

印　　张/15.5

字　　数/380千字

版　　次/2002年6月第2版 2002年6月第2次印刷

印　　数/1501～5500册

定　　价/25.00元

责任校对/陈玉梅

责任印制/母长新

序

本书是供科学、工程界人员学习积分方程理论与解法的一本入门教材或参考书。

电子计算机的出现，促进了计算数学的发展，在解决科学、工程问题中，有限元法及边界元法得到了广泛的应用。位势理论与积分方程(包括奇异积分方程)作为上述两种方法的数学基础，日益受到重视。

微分方程和积分方程，都是描述物理问题的重要数学工具，各有优点。场的问题，用前者处理通常比较方便，而后者在讨论源的问题时，显出它的优越性。对同一个问题，当用微分方程描述时，由于在求近似解的过程中涉及数值微分，所以往往引起较大的相对误差；而如果用积分方程来描述，因为数值积分引起的相对误差较小，虽然计算量较大，但由于累积误差较小，因而往往容易得到较理想的结果。当把区域上的微分方程化为在边界上的积分方程时，由于维数降低，计算量减少，在数学上，利用积分形式讨论存在性、惟一性往往比较方便，结果也比较完美。因此，如今“物理问题变得越来越复杂，积分方程变得越来越有用”。

积分方程论的发展，始终是与数学物理问题的研究紧密相连的。通常认为，最早自觉应用积分方程并求出它的解来的是 Abel，他在 1823 年从解决力学上的等时曲线问题引出了后来以他的名字命名的 Abel 方程。实际上，在此以前，Laplace 于 1782 年所提出的求 Laplace 变换的反变换问题，就要求解出一个积分方程。Fourier 实际上已求出了一类积分变换的反变换，这相当于解出了一类积分方程。

积分方程论是泛函分析中最早得到发展的一个重要分支。它的形成与发展，对泛函分析中许多基本概念(例如平方可积函数、平均收敛、算子等)的形成，对线性算子一般理论的创立，以至于对泛函分析整个学科的形成，都起了重要的推动作用。

利用泛函分析中全连续算子线性方程的理论，可以很简洁、方便地得到 Fredholm 线性积分方程理论的结果。但由于读者掌握积分方程这一工具主要是为了解决本专业的问题，不应该对他们的数学基础作过高的要求。因此，本书以具备大学微积分、线性代数基础的读者能够掌握这一要求为出发点，来展开课程的内容。希望本书能为日后打算继续进修泛函分析的读者提供一些具体的实例和背景知识。

为了适应读者全面掌握理论和解决实际问题的需要，本书除了包含通常的线性积分方程的理论与解法之外，还列入了一般教材中不涉及的奇异积分方程、非线性方程与方程组；对求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法，以及数学物理反问题中常出现的第一类方程，都各设一章加以叙述。

为使读者能通过尽量少的篇幅获得尽可能多的信息，并提高他们解决问题的能力，本书力求符合由浅入深的认识规律，在教学体系及内容叙述上没有因袭原有教材的框架，在结构安排及逻辑顺序上作了较细致的考虑。有些内容在结构与处理方式上均与传统有所不同。根据需要，作者增添了某些重要结论并给出证明。对某些定理，为了便于读者领会其实质及作用，对结论的文字叙述作了必要的变更。

本书内容较为充实。讨论问题时从理论及实际的具体问题出发。内容安排力求科学合理，方程的类型较全，几乎每种解法都有例题说明，便于读者掌握。为了系统地、准确地反映学科的最基本的内容，使读者在数学理论水平上有所提高，本书对重要的定理尽可能给出证明，并对其中一些定理的证明，在不失严格性的情况下加以简化，而不过分追求学科本身的完备性。

第一章介绍积分方程的分类，并从数学本身及许多领域的实际问题引出积分方程。

第二至第四章叙述线性积分方程(主要是第二类方程)的基本理论与解法。

第二章提出解 Fredholm 方程的逐次逼近法、Fredholm 方法，并建立了这种方程的基本理论——Fredholm 定理，还给出了退化核方程的解法。

第三章介绍了对称核方程的基本理论——Hilbert-Schmidt 理论，它给出了与 Fredholm 方法相互独立的另一种方法。Hilbert-Schmidt 定理还可用来处理第六章中的第一类对称核方程。此外还给出非齐次对称核方程解的公式。

把常微分方程或偏微分方程的边值问题化为积分方程来研究，是微分方程理论的一种重要方法(同时是推动积分方程理论发展的动力)，在这一章还介绍了如何利用 Green 函数把常微分方程边值问题化为积分方程。考虑到在一般教材中通常不介绍常微分方程边值问题 Green 函数的求法，因此本书把它列入附录中供读者参考。

第四章除了介绍第二类 Volterra 方程的逐次逼近法外，还介绍了把它化为常微分方程初值问题的方法，而第一类 Volterra 方程通常化为第二类方程去求解。

第五章叙述适用于各类(卷积型)方程的积分变换法，同时还介绍了在求 Laplace 变换(反变换)中有重要作用的广义乘法定理。

第六章给出了第一类 Fredholm 方程的基本定理——Schmidt-Picard 定理，还专列一节介绍解这类方程的母函数法。

第七章介绍了常用的求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法。

第八章简要地叙述了在实际上很有用的奇异积分方程的解法及基本定理。

第九章扼要地介绍了积分方程组与非线性方程的一些重要结论，给出了可以用逐次逼近法求解的条件。

在每章后都附有较多难易适当的习题，书末的附录有些是补充预备知识用的，另一些可供读者解决实际问题时查阅。

在讲授本书时，可根据需要和可能来灵活安排课程。本书前五章可以组成所需学时数最少的课程，如时间允许可添上第六、七章。最后两章相互独立，可根据需要选用其中的一章或全部。后四章亦可不列入课程，供读者日后查阅。

在本书编写过程中，承各位师长、同行、同事的鼓励和协助，在此表示感谢。本书在为工科研究生讲授多遍的基础上定稿，但其中难免有不当之处，请各位同行及读者不吝指正。听课的研究生提出了不少有意义的问题和建议，对书稿的形成起了积极的作用。北京师范大学陈方权教授详细地审阅了全稿，并提出了许多有益的意见与建议，作者在此一并致谢。

作者于 1989 年 4 月

第二版序

本书体系新颖，介绍的内容全面，并紧密结合实际应用，反映了该学科的最新发展，因此出版后能适合读者的需要。

为了适应研究生全面掌握理论和解决实际问题的需要，本书除了包括通常的线性积分方程的理论和解法之外，还列入了一般积分方程教材中不涉及的，但在实际中很有用的奇异积分方程、非线性积分方程、积分方程组。此外，还对求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法，以及在目前发展迅速的，数学物理反问题中常出现的第一类积分方程，都各设一章加以叙述。

本书深入浅出。为了使研究生能通过尽量少的篇幅获得尽量多的信息，并促进他们解决问题能力的提高，在教材展开时力求符合由浅入深的认识规律，而且在教学体系及内容安排上，具有独创性，突破了原有教材的框架，对结构安排及逻辑顺序，做了周密的考虑。其中一些内容，在结构及叙述方式上，均与传统教材有所不同。为了满足读者的需要，作者还增添了某些重要结论并给出证明。为了减轻读者的负担，作者还独创性地给出一些定理的简化、巧妙并具有启发性的证明。为了系统地、准确地反映学科的最基本的内容，促进读者数学理论水平的提高，本教材对重要的定理尽可能给出证明。并对其中一些定理的证明，在不失严格性的情况下加以简化。对某些定理，为了便于读者领会它的实质与作用，作者还在结论的文字叙述上进行了必要的处理。

本教材的框架、结构与内容安排，曾与来访的国外学者交流过，得到很高的评价。

本书出版后，收到一些读者热情洋溢的来信，对作者的工作给予肯定与鼓励，在此表示衷心的感谢。西安交通大学电气工程学院马西奎教授于 1995 年 9 月写信给作者。他在该校为“电磁场与微波技术”专业的研究生开设《电磁理论中的数学方法》课时，使用了本书。他在信中说：“这本书的编写思想、体系及内容，与以往的教材相比，大有不同，具有比较鲜明的特色，尤其适于工科类，便于掌握。对于工科研究生来说，学后即能解决论文过程中的积分(方程)问题。”北京理工大学科技学院范天佑教授告诉作者，他在评审某些院校的博士生毕业论文时，见到有的博士论文中就引用了作者编著的《积分方程》，说明此书颇受欢迎。他还说，此书除可做工科专业硕士研究生教材外，也可供理科专业硕士研究生参考。

作者从事积分方程的研究，结合研究工作，作者在编著本教材时，查阅了大量最新的外文文献，因此书中包含了其他同类中文书不涉及的内容。本教材中一些例题，作者还亲自上机试算过。由于本书介绍了不少最新的研究成果，因此一些研究人员，也把本教材提供的信息，作为研究工作的工具和手段。在研究课题时，把本书作为重要的参考文献。大连理工大学力学系的一位博士后，廊坊陆军导弹学院 5 室的一位研究人员等，因研究工作的需要，还来京与作者讨论《积分方程》一书中的问题。

2001 年 11 月，本书申报全国研究生教学用书。在申报过程中，北京理工大学科技学院的领导给予支持。北京理工大学出版社决定出版本书的第二版。

本书第二版由沈以淡主编，协助编写工作的有王季华、沈立、沈佳、王蓉庄、林韵、邓以红、王须蓉、石敏达、赵俊、徐漫雪等。

主编　沈以淡

2001 年 11 月 18 日于上海

目　录

第一章　积分方程的概念、分类及来源

本章介绍与积分方程有关的概念，并对它的分类加以讨论，最后介绍一些引出积分方程的实例。

§1.1　积分方程的概念与分类

1. 基本概念

一般来说，一个在积分号下出现待求函数的方程，称为**积分方程**。

含一个未知函数的积分方程的一般形式为

$$a(x)\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)F[\varphi(t)]\mathrm{d}t+f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{1.1-1}$$

式中　$f(x)$，$a(x)$，$k(x,t)$为已知函数；$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的已知泛函；a、b为常数。$f(x)$称为自由项，$k(x,t)$称为积分方程的核。λ是参数，由于积分方程往往与特征值问题有关，因此通常把积分方程记为上述含参数λ的形式。方程可能仅对λ的某些值有解，也可能根本没有解。

当$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的线性泛函时，称为线性积分方程，它的一般形式为

$$a(x)\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)\tag{1.1-2}$$

若$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的非线性泛函，则称为非线性积分方程。

如果自变量的个数有2个或2个以上，称为多维积分方程，本书主要讨论一维积分方程。

2. 方程的分类

积分方程可分为**线性方程**与**非线性方程**。对于线性积分方程又可以进一步加以分类。

按方程的形式分，可以分为第一类、第二类方程。

若待求的未知函数$\varphi(x)$仅出现在积分号内，称为**第一类方程**，例如

$$\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)=0\tag{1.1-3}$$

若未知函数既出现在积分号内，又出现在积分号外，则称为**第二类方程**，例如

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)\tag{1.1-4}$$

若积分限都是常数，称为 **Fredholm 方程**；若积分限中有一个是变数，则称为 **Volterra 方程**。

方程(1.1-3)是一个**第一类 Fredholm 方程**。

方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)\tag{1.1-5}$$

称为**第二类 Fredholm 方程**。

方程

$$\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) = 0 \tag{1.1-6}$$

称为**第一类 Volterra 方程**；方程(1.1-4)称为**第二类 Volterra 方程**。

Fredholm 方程(1.1-5)与 Volterra 方程(1.1-4)的区别在于积分限，前者的积分限为常数，后者的积分上限为变数。如果在 $a\leqslant x\leqslant t\leqslant b$ 时取 $k(x,t)\equiv 0$，则 Volterra 方程(1.1-4)(或(1.1-6))化为 Fredholm 方程(1.1-5)(或(1.1-3))，因此可以把 Volterra 方程看成是 Fredholm 方程的特殊情况。但是由于 Volterra 方程的理论有独特之处，因此常常把它们分开来加以讨论。

对于 Fredholm 方程来说，第二类方程解的理论比较完整、完备，而第一类方程的理论至今还不够完整，但由于解决数学物理反问题的需要，第一类方程的理论日益受到重视。对于 Volterra 方程来说，在很多情况下第一类方程可以化为第二类方程，因此这两类方程的理论没有本质上的差别。

积分方程还可以按核的性质加以分类。

当 $k(x,t)$ 是 (x,t) 的连续函数，或者 $k(x,t)$ 在区域 $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ 虽不连续，但平方可积，即

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

存在且取有限值时，称核 $k(x,t)$ 为**非奇性核**或 **Fredholm 核**。

当 $k(x,t)$ 具有以下形式

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}$$

式中 $h(x,t)$ 为有界函数，常数 $0<\alpha<1$，则称为**弱奇性核**。

当 $k(x,t)$ 具有形式

$$k(x,t) = \frac{a(x,t)}{x-t}$$

式中 $a(x,t)$ 关于 x、t 的偏导数存在。此时

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a(x,t)}{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

在通常意义下是发散的，但如果对 $\varphi(x)$ 加上一定的限制，可使

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x-\varepsilon} k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x+\varepsilon}^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]$$

存在，此时称 $k(x,t)$ 为 **Cauchy 奇性核**。

以上三种核所对应的方程，分别称为**非奇性核(连续核)方程**、**弱奇性核方程**、**奇异积分方程**。弱奇性核方程解的理论与非奇性核方程的理论类似，但奇异积分方程的理论与非奇性核方程的理论有本质的差别。使非奇性核积分方程的一般理论不成立的一类积分方程，统称为奇异积分方程，除了上述含 Cauchy 奇性核的方程外，它还包括积分限至少有一个为无限的积分方程，例如方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^{\infty} \varphi(t)\cdot\sin xt\ \mathrm{d}t$$

等等。

上述各种分类并不能包罗所有可能的积分方程，提出上述这些类型的出发点是，在实际问题或理论问题中出现的积分方程绝大部分可以归入上述方程中的某一种。

积分方程这一学科的基础是由 Fredholm 和 Volterra 奠定的，后来 Hilbert 及 Schmidt 对它的基本理论也做出了重要的贡献。

本书主要叙述第二类线性积分方程的基本理论与解法，为了适应解决实际问题的需要，对第一类方程及非线性方程、积分方程组、奇异积分方程的理论也做了适当的介绍。此外，对实际中很有效的数值解法也有较详细的说明。

§1.2 积分方程的来源

在静电学、电动力学、弹性力学、流体力学、电磁场理论、辐射学、地球物理勘探等学科中，许多问题的解决可化为解对应的积分方程。常微分方程与偏微分方程的定解问题也可以化为等价的积分方程，解偏微分方程反问题的数值方法，常常导出第一类 Fredholm 方程。

在一个过程中，如果未知函数在 x 点的值仅依赖于邻近点或其他孤立点处的值，就引出常微分方程或偏微分方程的定解问题；如果未知函数的值依赖于它在整个区域(包括边界)上的值，则往往导致积分方程或积分-微分方程。

同一个问题有时既可以用微分方程的定解问题又可以用积分方程来描述，而微分方程定解问题本身也可以化为积分方程。积分方程这一数学工具正日益受到重视，这是因为化为积分方程可以降低维数，减少所用节点的个数，缩短计算时间，节省了费用。这样，问题的处理就比较方便，解的性质也显得比较清楚。当边界不特别复杂时，采用积分方程方法更具有突出的优点。

把微分方程的定解问题化为积分方程，除了可以降低维数外，还可使得对未知函数(性质上)的限制减弱(只要满足积分方程即可)。此外，这样可以不再通过先寻求微分方程所有可能的解，到最后再利用定解条件来确定满足定解问题的解，而是把满足方程与适合定解条件，同时体现在积分方程这一个紧凑的形式中。用积分形式讨论数学问题往往更容易处理，而且能便于得到理想的结果，这对问题的解决有重要的意义。把常微分方程的定解问题化为积分方程，可以顺利地得到解的存在性与惟一性定理，就是一个典型的例子。

有些反映扩散与迁移现象的数学问题，不能用微分方程表示，为了解决这些问题，就必须用积分方程来解决，例如中子迁移理论中的一些问题等等。

以下介绍引出积分方程的一些实际问题与数学问题。为了适应各方面读者的需要，仅选择比较典型、有代表性的实例，不作全面的介绍。

1. 弹性弦的挠曲

在直角坐标系 xOy 中，有一条固定在水平轴 x 上两点 $x=0$，$x=l$ 的轻且柔软的弹性弦，在弦上横坐标为 x 的点 M 处，有强度为 $p(x)$ 的负载，在它的作用下，点 M 处的位移为 $y(x)$(见图 1.1)。如果位移函数 $y(x)$ 为已知，确定负载强度 $p(x)$ 的问题就化为解一个积分方程。

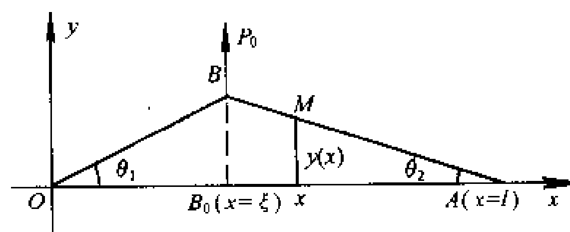


图 1.1

设弦开始时是静止的，且只受到水平张力 T_0 的作用，而张力 T_0 与其他力相比很大。由于弦是柔软的，它容易改变形状，而由弯曲或扭转引起的恢复力可忽略不计。于是弦的初始位置是水平的，即与 x 轴重合。

设在弦上横坐标 $x=\xi$ 的点 B_0 处，施以垂直方向的力 P_0，于是弦具有折线形状 OBA。

由于 P_0 与 T_0 相比很小，可设负载点 $x=\xi$ 处弦的最大挠曲 $BB_0=\delta$ 与 OB_0 及 B_0A 相比很小。因而可以认为在力 P_0 的作用下，弦的张力 T_0 保持不变。把弦在 B 点的张力与力 P_0 都投影到 y 方向，得到

$$T_0 \sin\theta_1 + T_0 \sin\theta_2 = P_0$$

式中 θ_1、θ_2 分别是 OB、BA 与 x 轴的夹角。

由于挠曲微小，θ_1、θ_2 很小，因而成立以下近似式

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\delta}{\xi}, \quad \sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{\delta}{l-\xi}$$

于是 $T_0\dfrac{\delta}{\xi}+T_0\dfrac{\delta}{l-\xi}=P_0$

因此 $\delta=\dfrac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}\xi$

当 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 时，由图 1.1 可知 $y/x=\delta/\xi$，即

$$y(x) = \frac{\delta}{\xi}x = \frac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}x$$

式中 $y(x)$是弦上横坐标为 x 的点处的位移。

当 $\xi\leqslant x\leqslant l$ 时，有

$$\frac{y}{l-x} = \frac{\delta}{l-\xi}$$

即

$$y(x) = \frac{P_0(l-x)\xi}{T_0 l}$$

记

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{l-\xi}{T_0 l}x & (0\leqslant x\leqslant\xi) \\ \dfrac{l-x}{T_0 l}\xi & (\xi\leqslant x\leqslant l) \end{cases} \tag{1.2-1}$$

这样，相应的挠曲曲线之方程为

$$y(x) = G(x,\xi)P_0$$

当 $P_0=1$，即对于单位力

$$y(x) = G(x,\xi) \tag{1.2-2}$$

由式(1.2-1)，显然成立

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

在弦上连续分布的(单位长度上的)强度为 $p(\xi)$的负载，作用在弦上 $x=\xi$ 到 $x=\xi+\mathrm{d}\xi$ 这一微元上的力为 $p(\xi)\mathrm{d}\xi$，所产生的挠曲为 $G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi$。因此，负载分布 $p(x)$产生的挠曲为

$$y = y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.2-3}$$

(1) 对于上述弦，求负载分布 $p(x)$，使得在此分布的作用下，弦取给定的形状 $y=y(x)$。

解决这个问题就需要解上述以 $p(x)$ 为未知函数的积分方程(1.2－3)，该方程为第一类 Fredholm 积分方程。

(2) 若已知作用于弦的力随时间 t 而变，且它在点 $x=\xi$ 的强度为 $p(\xi)\sin\omega t$(ω 为正常数)，则在此负载分布的作用下，弦作微振动，由于振幅微小，可设弦在振动时其上每一点的横坐标不改变，此时弦的振动可以用 $y=y(x)\sin\omega t$ 表示。设弦在 $x=\xi$ 处的(质量)密度为 $\rho(\xi)$，则在时刻 t，从点 $x=\xi$ 到 $x=\xi+d\xi$ 这段弦同时受到力 $p(\xi)\sin\omega t\, d\xi$ 及惯性力 $-\rho(\xi)d\xi\dfrac{d^2y}{dt^2}=\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t\, d\xi$ 的作用。此时式(1.2－3)成为

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t+\omega^2\rho(\xi)y(\xi)\sin\omega t]d\xi$$

约去公因子 $\sin\omega t$，就有

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi+\omega^2\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi$$

再设

$$\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi=f(x) \tag{1.2-4}$$

及

$$G(x,\xi)\rho(\xi)=k(x,\xi),\quad \omega^2=\lambda$$

就得到

$$y(x)=\lambda\int_0^l k(x,\xi)y(\xi)d\xi+f(x) \tag{1.2-5}$$

当函数 $p(\xi)$ 为已知，因而 $f(x)$ 为已知函数时，式(1.2－5)就是一个以 $y(x)$ 为未知函数的第二类 Fredholm 积分方程。由式(1.2－1)，$G(0,\xi)=G(l,\xi)=0$，再由式(1.2－4)，$f(0)=f(l)$。

2. *存贮问题与线性动力系统问题*

设 $\varphi(t)$ 是一个随时间 t 而改变的量，且它按某种规律与过去或者未来某一时间区间内的它本身的值相联系。在数学上，$\varphi(t)$ 的变化规律可以用以 $\varphi(t)$ 为未知函数的积分方程来描述。如果自变量不是时间而是空间坐标，情况是同样的。

(1) *存贮问题*　一个商店销售某些商品，设进货与售货是一个连续过程，买进的商品可以立即出售。设在商店购进了商品后，在时刻 t 尚未售出商品的比例为 $k(t)$。现在要求确定商店进货的速率 $\varphi(t)$，使得商店所存贮商品的总价值保持不变。

设商店在时刻 $t=0$ 购进总价值为 A 的商品后开始营业，随后同时以速率 $\varphi(t)$ 进货，在时间间隔 $[\tau,\tau+d\tau]$ 内，商店购进商品的价值为 $\varphi(\tau)d\tau$，这些商品由于出售而减少。在时刻 $t>\tau$ 时，尚未售出商品的价值为

$$k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

因此，在时刻 t，尚未售出的商品，及到那时为止所购进商品的价值之和为

$$Ak(t)+\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

按要求，在任何时刻 t，商店所贮存商品总价值应保持不变，于是就有

$$A=Ak(t)+\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{1.2-6}$$

这样，所需确定的进货速率 $\varphi(t)$是积分方程(1.2-6)的解。方程(1.2-6)是一个第一类 Volterra 积分方程。

如果任何一种货物可以在时间间隔 T 内出售，且每一种货物平均在时间间隔 T 内售完，则有

$$k(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{T} & (t\leqslant T)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$$

(2) 线性动力系统问题　已知一个线性动力系统的输入信号为 $x(t)$，输出信号为 $y(t)$。众所周知，$y(t)$与 $x(t)$的关系为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中　$g(t,\tau)$是由此动力系统确定的权函数。

如果当 $\tau>t$ 时，$g(t,\tau)=0$，且当 $t<t_0$ 时，$x(t)=0$，则上式成为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}g(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-7}$$

这样，当要求从已知输出信号 $y(t)$来确定输入信号 $x(t)$时，就需要在给定 $y(t)$的条件下，解关于 $x(t)$的积分方程(1.2-7)。式(1.2-7)仍是一个第一类 Volterra 方程。

3. 常微分方程的定解问题

通常，微分方程的初值问题可以化为 Volterra 方程，常微分方程的边值问题可以化为 Fredholm 方程。

(1) 一阶常微分方程的初值问题　当 $f(x,y)$满足适当的连续条件，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y) & (1.2-8)\\ y(0)=C_0 & (1.2-9)\end{cases}$$

的解满足方程

$$y(x)=C_0+\int_0^x f[u,y(u)]\mathrm{d}u \tag{1.2-10}$$

式(1.2-10)是 $y(x)$的一个积分方程。

若 $f(x,y)$关于 x 是线性的，则方程是线性 Volterra 积分方程；否则是非线性 Volterra 积分方程。显然式(1.2-10)的任何(一阶导数连续的)解，满足方程式(1.2-8)与初始条件式(1.2-9)。

类似地，关于最高阶(n 阶)导数解出的任何 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

满足条件

$$y(x_0)=C_0,\ y'(x_0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1}$$

的定解问题，可以化为等价的非线性 Volterra 积分方程组。

(2) n 阶线性微分方程的初值问题　系数 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$连续的 n 阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=F(x) \tag{1.2-11}$$

满足初始条件

$$y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=C_{n-1} \tag{1.2-12}$$

的定解问题，可以化为解第二类 Volterra 积分方程。

以下以二阶微分方程为例来加以说明。对于二阶方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x) & (1.2-13)\\ y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1 & (1.2-14)\end{cases}$$

设

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x) \tag{1.2-15}$$

上式两端关于 x 积分，利用初始条件式(1.2-14)，依次得到

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)dt+C_1 \tag{1.2-16}$$

$$y=\int_0^x\left[\int_0^u\varphi(t)dt+C_1\right]du+C_0=\int_0^x dt\int_t^x\varphi(t)du+C_1x+C_0$$

$$=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+C_1x+C_0 \tag{1.2-17}$$

利用式(1.2-16)、(1.2-17)，可以将定解问题式(1.2-13)、(1.2-14)化为积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt+f(x) \tag{1.2-18}$$

式中 $k(x,t)=-[a_1(x)+a_2(x)(x-t)]$ (1.2-19)

$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x)$ (1.2-20)

式(1.2-18)是一个第二类 Volterra 积分方程。

求解由式(1.2-19)、(1.2-20)确定的 $k(x,t)$ 与 $f(x)$ 所对应的积分方程(1.2-18)，再把解代入式(1.2-17)就可以得到定解问题式(1.2-13)、(1.2-14)的惟一解。

对于 n 阶微分方程的初值问题，可以按与上述类似的方法，并利用下列公式

$$\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\cdots\int_{x_0}^x f(x)dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x(x-u)^{n-1}f(u)du \tag{1.2-21}$$

化为等价的第二类 Volterra 积分方程。

例 1.2.1 确定下列定解问题

$$\begin{cases}y'''-2xy=0\\ y(0)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=y''(0)=1\end{cases}$$

所对应的积分方程。

解 设

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\varphi(x)$$

由式(1.2-21)及初始条件可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^x\varphi(t)dt+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+x+1$$

$$y = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

把以上三式代入原微分方程，就得到积分方程。

$$\varphi(x) = x\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t + x^3 + 2x^2 + x$$

利用微分方程定解问题与积分方程的联系，可以把某些特殊的第一类或第二类 Volterra 积分方程，化为对应的微分方程的定解问题来求解。

例 1.2.2　解积分方程

$$\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = x$$

解　设

$$y = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-22}$$

则　$\mathrm{e}^x y = x$，

即

$$y = x\mathrm{e}^{-x} \tag{1.2-23}$$

式(1.2－22)两端对 x 求导，得

$$y' = \mathrm{e}^{-x}\varphi(x) \tag{1.2-24}$$

而式(1.2－23)两端对 x 求导，可得

$$y' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x} \tag{1.2-25}$$

由式(1.2－24)、(1.2－25)，就得到原积分方程的解

$$\varphi(x) = 1 - x$$

例 1.2.3　解积分方程

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x$$

解　设

$$y = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-26}$$

于是

$$y|_{x=0} = 0$$
$$\varphi(x) = y + \mathrm{e}^x \tag{1.2-27}$$

由式(1.2－26)、(1.2－27)

$$y' = \varphi(x) = y + \mathrm{e}^x$$

这样，原积分方程化为常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} y' - y = \mathrm{e}^x \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

解之，得 $y = x\mathrm{e}^x$。再由式(1.2－27)，就得到原积分方程的解

$$\varphi(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$$

n 阶线性常系数微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n y=F(x)\\ y(x_0)=C_0,\ y'(x_0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1}\end{cases}$$

可以化为第二类卷积型(它的核仅依赖于 $x-t$)Volterra 积分方程

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}k(x,t)\varphi(t)dt+f(x)$$

式中 $$k(x,t)=-\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$f(x)=F(x)-a_1(x)C_{n-1}-a_2(x)(C_{n-1}x+C_{n-2})-\cdots-$$
$$a_n(x)\left[C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_1x+C_0\right]$$

(3) **常微分方程的边值问题** 常微分方程的边值问题可以化为第二类 Fredholm 方程。

对于边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 & (1.2-28)\\ y(0)=y(1)=0 & (1.2-29)\end{cases}$$

令

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$$

上式两边关于 x 积分，得到

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi+C_1$$

上式两边再关于 x 积分，就有

$$y(x)=\int_0^x du\int_0^u\varphi(\xi)d\xi+C_1x+C_2$$

交换积分顺序，得

$$y(x)=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi\int_\xi^x du+C_1x+C_2=\int_0^x(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+C_1x+C_2$$

由式(1.2－29)知，$C_2=0$，且

$$\int_0^1(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi+C_1=0$$

因此

$$C_1=-\int_0^1(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

于是

$$y(x)=\int_0^x(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi-\int_0^1x(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

把上式右端的第二个积分表示为$(0,x)$、$(x,1)$这两个区间上积分之和，就有

$$y(x)=-\left[\int_0^x\xi(1-x)\varphi(\xi)d\xi+\int_x^1x(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi\right]$$

再由式(1.2－28)可得第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{1.2-30}$$

式中
$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x) & (0\leqslant\xi\leqslant x)\\ x(1-\xi) & (x\leqslant\xi\leqslant 1)\end{cases}$$
就是边值问题式(1.2-28)、(1.2-29)的 Green 函数，显然，它满足对称性
$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

例 1.2.4 已知弦作强迫简谐振动的方程为
$$\varphi''+\lambda\varphi=f(x) \tag{1.2-31}$$
边界条件为
$$\varphi(0)=\varphi(l)=0 \tag{1.2-32}$$
求在点 x 处位移 $\varphi(x)$ 满足的积分方程。

解 对 $\int_0^x(x-\xi)\varphi''(\xi)\mathrm{d}\xi$ 分部积分，可得
$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\int_0^x(x-\xi)\varphi''(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.2-33}$$
由式(1.2-31)，得
$$\varphi''(x)=f(x)-\lambda\varphi(x)$$
把上式代入式(1.2-33)，再利用 $\varphi(0)=0$，就有
$$\varphi(x)=x\varphi'(0)+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_0^x(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-34}$$
再令 $x=l$，利用式(1.2-32)，可得
$$\varphi'(0)=\frac{1}{l}\int_0^l(l-t)[\lambda\varphi(t)-f(t)]\mathrm{d}t$$
再代入式(1.2-34)，经计算，就有
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l k(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=h(x) \tag{1.2-35}$$
式中
$$k(x,\xi)=\begin{cases}\xi\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & (0\leqslant\xi\leqslant x)\\[2ex] x\left(1-\dfrac{\xi}{l}\right) & (x\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}$$
$$h(x)=-\int_0^l x\left(1-\frac{\xi}{l}\right)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
式(1.2-35)是边值问题式(1.2-31)、(1.2-32)所对应的第二类 Fredholm 方程。

4. 椭圆型方程边值问题

利用位势理论，可以把椭圆型偏微分方程的边值问题化为积分方程。方法是，把满足偏微分方程的函数，表示为单层位势或双层位势，然后选取其中的密度函数，使对应的位势满足边界条件，密度函数所适合的方程就是 Fredholm 积分方程。

例如，对二维 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题
$$\Delta\varphi=0,\quad \varphi|_L=f$$
可以把它的解 φ 表示成以 $\rho(P)$ 为密度函数的单层位势：
$$\varphi(M)=\int_L\rho(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P \tag{1.2-36}$$

式中 $\varphi(M)$表示φ在区域内点M的值，r_{MP}是M点到边界上点P的距离。

然后对式(1.2-36)令M趋近于边界L上的点P_1，记r_{PP_1}为边界上点P与P_1的距离，就得到确定未知密度$\rho(P)$的第一类方程

$$f(P_1)=\int_L \rho(P)\ln\frac{1}{r_{PP_1}}dl_P$$

当$P=P_1$时，上列第一类方程的核显然变为∞，为了避免这种情况，Volterra、Neumann及Poincare把解φ表示为双层位势

$$\varphi(M)=\int_L \rho(P)\frac{\partial \ln\frac{1}{r_{MP}}}{\partial n}dl_P \tag{1.2-37}$$

式中 n为L在P点的外法线方向。

再令点M趋近于边界上的点P_1，就得到未知密度$\rho(P)$所满足的积分方程

$$f(P_1)=\pi\rho(P_1)-\int_L \rho(P)\frac{\partial \ln\frac{1}{r_{PP_1}}}{\partial n}dl_P \tag{1.2-38}$$

式(1.2-38)是一个以

$$k(P,P_1)=\frac{1}{r_{PP_1}}\cos(\boldsymbol{n},\vec{PP_1})$$

为核的第二类Fredholm方程，式中$(\boldsymbol{n},\vec{PP_1})$为在$P$点边界$L$的外法线向量$\boldsymbol{n}$与$\vec{PP_1}$的夹角。

利用第二章的定理可知，当$\lambda=\frac{1}{\pi}$时，上述方程的Fredholm行列式不为零，因此它存在惟一解。

5. *多维积分方程*

有时会出现几个自变量的情况，这时所引出的方程是**多维积分方程**。

在静电学中可以证明，若电荷分布密度为$\rho(P)$，只要在无穷远处电荷分布为充分小，则电势

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(P_1)}{r_{PP_1}}d\tau_{P_1} \tag{1.2-39}$$

式中 ε是介电常数。

式(1.2-39)是一个由已知电势分布$V(P)$来确定未知电荷分布$\rho(P)$的多维第一类积分方程。

实际上，方程(1.2-39)的解为

$$\rho(P)=-\varepsilon\Delta V \tag{1.2-40}$$

而偏微分方程(1.2-40)的在无穷远为充分小的解，由式(1.2-39)给出。

对于热传导混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & [(x,y)\in\Omega,\ t>0]\\ u|_{t=0}=0\\ u|_{\Gamma}=\varphi(s,t)\end{cases}$$

式中　Ω 是 xOy 平面上的一个有界区域，Γ 是 Ω 的边界，s 是确定 Γ 上一个点位置的参数，设 $0 \leqslant s \leqslant 1$。如果寻求双层热势形式的解

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left[\int_0^1 \frac{u(\sigma,\tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} d\sigma\right] d\tau$$

式中　σ 是积分路径 Γ 上点对应的参数 s 的值，$\boldsymbol{n}$ 是点 $s=\sigma$ 处 Γ 的外法线方向，$u(\sigma,\tau)$ 是未知热势的密度，r 是 Ω 上点 (x,y) 到 Γ 上参数 $s=\sigma$ 对应之点的距离，则密度函数 $u(s,t)$ 满足下列二维积分方程

$$u(s,t) - \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left[\int_0^1 \frac{u(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2} r e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) d\sigma\right] d\tau$$
$$= -\varphi(s,t)$$

式中　r 是 Γ 上参数 s 对应的任意点与参数 $s=\sigma$ 对应点的距离，向量 $\boldsymbol{r}$ 从 s 对应的任意点指向 $s=\sigma$ 对应的点。

6. Abel 问题

1823 年，Abel 研究了**等时曲线问题**(后来命名为 **Abel 问题**)。

已知一个质点在重力作用下，沿铅直平面中某条曲线无摩擦地滑动(见图 1.2)。问题要求确定此曲线的形状，使质点沿此曲线以纵坐标 $y=h$ 的点为起点，从静止开始滑动，经过预定的时间 $f_1(h)$ 到达 x 轴($y=0$)上的终点，即质点沿此曲线高度下降 h 所需的时间 t，是起点纵坐标 h 的一个已知函数 $f_1(h)$：$t=f_1(h)$。

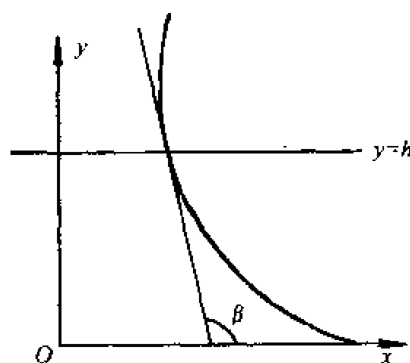


图　1.2

设质点的质量为 m，重力加速度为 g，由能量守恒定律可知，在任何位置，运动质点动能的增加，等于其位能的减少，即 $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y)$，因此运动质点速度的绝对值 $v = \sqrt{2g(h-y)}$ $(y<h)$。设 β 为曲线的切线与 x 轴的夹角，于是运动质点在 y 方向的分速度的绝对值为

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(h-y)}\sin\beta$$

因此

$$dt = -\frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}\sin\beta}$$

上式两边从 0 到 h 积分，并记

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sin\beta} \tag{1.2-41}$$

就有

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = -\sqrt{2g} f_1(h)$$

记 $-\sqrt{2g} f_1(h) = f(h)$，最后得到

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = f(h) \tag{1.2-42}$$

式中　$\varphi(y)$是未知函数，$f(h)$是已知函数。

式(1.2-42)称为 **Abel 方程**，是一种特殊的第一类 Volterra 方程。它是历史上最早提出的积分方程之一。

求出方程(1.2-42)的解 $\varphi(y)$，就可以建立曲线的方程。由式(1.2-41)，可得

$$y = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\sin\beta}\right) \equiv u_1(\beta)$$

但

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta \tag{1.2-43}$$

所以

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\tan\beta} = \frac{u_1'(\beta)\mathrm{d}\beta}{\tan\beta}$$

因此

$$x = \int \frac{u_1'(\beta)}{\tan\beta}\mathrm{d}\beta \equiv u_1(\beta)$$

于是得到所求曲线的参数方程

$$x = u_2(\beta),\quad y = u_1(\beta)$$

7. 人口问题

人口增长问题，对全世界今后的发展是一个至关重要的问题。在一定的条件下，预测在某一时刻 t 人口总数 $n(t)$的问题，就化为解一个积分方程。

设在时刻 $t=0$ 人口总数为 n_0。$f(t)$是生存函数，它反映了在时刻 $t=0$ 出生且在年龄为 t 时生存的人数在人口总数中所占的比率，图 1.3 所示的是生存函数 $f(t)$的图形。

在时刻 t 生存的人数为

$$n_s(t) = n_0 f(t) \tag{1.2-44}$$

式中　$n_s(0)=n_0 f(0)=n_0$。

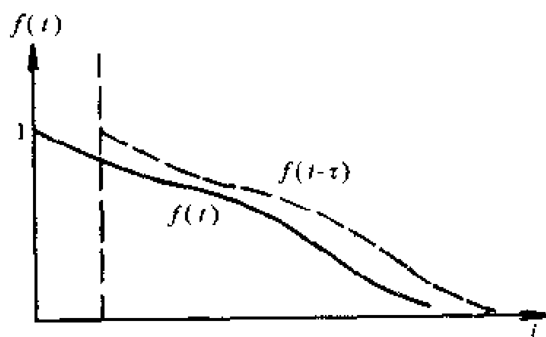


图　1.3

通常，由于婴儿诞生，人口数量不断增加。若婴儿的平均出生率为 $r(t)$，则在时刻 τ_i 的某一个时间间隔 $\Delta_i\tau$，在时刻 t 新增加的人口(如果他们生存下来)年龄为 $t-\tau_i$，由图 1.3 可以看出，这部分人活到年龄为 $t-\tau_i$ 的比率为 $f(t-\tau_i)$。因此，在时刻 t，由于在时刻 τ_i 的时间间隔 $\Delta_i\tau$ 内新生儿出世，使人口增加 $f(t-\tau_i)r(\tau_i)\Delta_i\tau$。若上述过程在时间区间$(0,t)$的全部 m 个子区间内持续进行，就得到和式

$$b_m(t) = \sum_{i=1}^{m} f(t-\tau_i)r(\tau_i)\Delta_i\tau \tag{1.2-45}$$

设子区间 $\Delta_i\tau$ 的最大值为 λ，令 $\lambda\to 0$，就得到由于新出生所增加的人口数为

$$b(t) = \int_0^t f(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-46}$$

这样，在时刻 t 人口总数为

$$n(t) = n_s(t) + b(t) = n_0 f(t) + \int_0^t f(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-47}$$

设出生率 $r(t)$与时刻 t 的人口数成比例

$$r(t) = kn(t) \tag{1.2-48}$$

式中 k 为比例系数。由式(1.2-47)、(1.2-48)得

$$n(t) = n_0 f(t) + k\int_0^t f(t-\tau)n(\tau)\mathrm{d}\tau$$

这是一个以 $n(t)$ 为未知函数的第二类"卷积型"的 Volterra 方程。

8. 设备的失效与更新

在生产过程中，生产部门为了避免因设备损坏影响正常生产，就需要使处于正常工作状态的设备，在任何时刻都保持一个固定的数量。这就要求确定设备的更新率 $r(t)$，确定更新率 $r(t)$ 的问题可以化为解一个以 $r(t)$ 为未知函数的积分方程。

首先设 $s(t)$ 是一个用以确定在 $t=0$ 时新买进的、且到时刻 t 保持完好的设备台数在设备总数中所占比率的函数，称为生存函数。

设在时刻 t 处于工作状态的设备总数为 $f(t)$，则在时刻 $t=0$ 新买进的设备数为 $f(0)$，由于损坏或磨损，到时刻 t，其中只有 $f(0)\cdot s(t)$ 台保持完好。为了在时刻 t 使设备台数保持大于 $f(0)\cdot s(t)$，从时刻 $t=0$ 到时刻 t，必须以一定的速率不断更新设备。设在时刻 τ，设备更新率为 $r(\tau)$，到时刻 t，在时刻 τ 所更换的新设备的使用期限为 $t-\tau$，此时保持完好的设备的台数所占的比率为 $s(t-\tau)$。由于在时刻 τ 开始的时间间隔 $\Delta\tau$ 内所更换(新买进)的 $r(\tau)\Delta\tau$ 台设备中，只有比率为 $s(t-\tau)$ 的那部分设备保持完好。这些不断更换的、保持完好的设备台数为 $r(\tau)s(t-\tau)\Delta\tau$，把它关于 τ 在时间区间 $(0,t)$ 积分，就得到

$$p(t) = \int_0^t s(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (t>0) \tag{1.2-49}$$

式中 $p(t)$ 是在时间区间 $0<\tau\leqslant t$ 内因更换而购进的设备，在时刻 t 仍保持完好的数量。因此，若再加上原有设备(即在 $t=0$ 时的新设备)在时刻 t 保持完好的数量 $f(0)s(t)$，就得到在时刻 t 处于工作状态的设备总数

$$f(t) = f(0)s(t) + \int_0^t s(t-\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-50}$$

如果 $f(t)$、$s(t)$ 为已知函数，则式(1.2-50)就是一个以 $r(t)$ 为未知函数的第一类 Volterra 积分方程。式中 $s(t)$ 满足条件 $s(0)=1$，即新购进的全部设备都处于工作状态。

9. 带电圆板 对偶积分方程组

成对出现的积分方程组，称为**对偶积分方程组**。这种对偶积分方程组，通常是一组混合边界条件的积分表达式。所谓混合边界条件，是指在边界区域的一部分上给出的是函数本身的值，而在其余部分给出的是函数的导数值。下面以 $A(\rho)$ 为未知函数的方程组就是一个对偶积分方程组

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \rho A(\rho)\mathrm{J}_0(r\rho)\mathrm{d}\rho = u_0 \quad (0\leqslant r<1) & (1.2-51)\\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \rho^2 A(\rho)\mathrm{J}_0(r\rho)\mathrm{d}\rho = 0 \quad (r>1) & (1.2-52)\end{cases}$$

式中 $\mathrm{J}_0(x)$ 是零阶第一类 Bessel 函数($\mathrm{J}_n(x)$ 是 n 阶第一类 Bessel 函数，它是 Bessel 微分方程 $x^2f''+xf'+(x^2-n^2)f=0$ 的、在 $x=0$ 有界的两个线性无关的特解之一)。

式(1.2－51)是带电圆板形成的电场在单位圆盘内部($0\leqslant r<1$)的电位保持恒定这一条件的积分表达式；而式(1.2－52)则描述了在单位圆盘外($r>1$)是完全绝缘的状况。

在第五章，将利用 Hankel 变换导出上述对偶积分方程组。

积分方程的重要性在于它能反映积累或遗传的情况，在这种场合，状态 $\varphi(t)$ 受到它以前全部值改为的积累所产生的影响。

10. 一种传输系统

研究一种线性的传输系统，设 $\varphi(t)$ 是系统的输入量，而 $s(t)$ 是系统的输出量；$A(t)$ 表示"传输的响应特性"，即当 $\varphi(t)$ 是单位阶跃函数时

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

所对应的输出量 $s(t)$。此时成立[7]

$$s(t)=\varphi(t)A(0)-\int_0^t\varphi(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-53}$$

即

$$\varphi(t)A(0)-\int_0^t\varphi(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=S(t) \tag{1.2-54}$$

下面以一个具有惯性的测量系统为例进行讨论。这里惯性是指当初始输入量等于 0，然后突变为 1，则仪器指针不是立刻指到读数处，而是经过一段时间逐渐到达读数处。

设指针按规律

$$A(t)=1+\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{2t} \tag{1.2-55}$$

从读数 1/2 处逐渐改变到读数 1 处，于是产生这样的问题：如何按从仪器指针观察到的读数 $s(t)$ 去求输入量 $\varphi(t)$ 的变化规律。这个问题归结为从第二类 Volterra 方程(1.2－54)解出 $\varphi(t)$ 来。

当 $s(t)\equiv1$，即如果在任何时刻测量仪器的读数总是 1 时，所测量的输入量 $\varphi(t)$ 的变化规律以可通过解(1.2－54)得到，式中 $A(t)$ 由式(1.2－55)给出，$s(t)\equiv1$。

在§7.3 中，将给出上述方程的近似解。

11. 绳索的扭转

在施加一个扭矩 $m(t)$ 使一条绳索(或一根棒)扭转时，假定扭转在初始时刻 t 立即产生，且在 t 之前没有施加其他扭矩，则为使此绳索(或棒)扭转角度 $\omega(t)$ 所需施加的扭矩 $m(t)$ 与扭转角 $\omega(t)$ 成比例，即

$$m(t)=h\omega(t) \tag{1.2-56}$$

但实际上，为使得绳索扭转角度 $\omega(t)$，扭矩是在一个时间区间内施加的。此外，由于在 t 之前，即在 $(-\infty,t)$ 内所施加的扭矩会改变绳索的物理性质，因而对时刻 t 的扭转产生影响，因此在时刻 t 的扭转角 $\omega(t)$，依赖于时刻 t 的扭矩以及在时刻 t 之前时间区间 $(-\infty,t)$ 内的扭矩。

绳索扭转的静平衡问题可以表示为

$$m(t)=h\omega(t)+\int_{-\infty}^t\varphi(t,\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-57}$$

式(1.2－57)是未知函数 $\omega(t)$的一个第二类 Volterra 方程，式中 h 是一个常数；$\varphi(t,\tau)$是一个已知函数，它表示 t 之前的扭矩如何影响绳索的物理性质因而影响时刻 t 的扭转角。$\varphi(t,\tau)$作为代替式(1.2－56)中之常数 h 的比例系数，反映了在时刻 t，对 t 之前连续施加的扭矩 $m(\tau)$ $(-\infty<\tau<t)$起多大的影响。

由时刻 τ 所施加的、使绳索扭转角度为 $\omega(\tau)\Delta\tau$ 的扭矩，在时刻 t 所产生的扭矩增量为 $\varphi(t,\tau)\omega(\tau)\Delta\tau$。把区间 $-\infty<\tau<t$ 内所有的扭矩相加，就得到最终所施加的扭矩

$$m(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi(t,\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-58}$$

这样，为了使一条绳索产生一个扭矩 $m(t)$，确定扭转角的变化率应取多大这一问题，就化为解 $\omega(t)$的一个第一类 Volterra 方程(1.2－58)。

$\varphi(t,\tau)$一般依赖于两个变量 t 与 τ，如果 $\varphi(t,\tau)$依赖于 t 与 τ 的差 $t-\tau$，即

$$\varphi(t,\tau)=\varphi_1(t-\tau)$$

则式(1.2－58)就是一个**卷积型的 Volterra 方程**。

12. 摆的受迫周期振动

一个摆在周期驱动力的作用下，作有限受迫周期振动，摆的振幅 $u(t)$满足下列非线性微分方程

$$u''(t)+\alpha^2\sin u(t)=G(t) \tag{1.2-59}$$

式中　α 为常数，G 为周期为 2 的奇函数。

为寻求方程(1.2－59)的周期为 2 的解(即在 $t=0$ 及 $t=1$ 时均为零的解)，引入

$$k(t,s)=\begin{cases}t(1-s) & (0<t<s<1)\\ s(1-t) & (0<s<t<1)\end{cases}$$

$$g(t)=\int_0^1 k(t,s)G(s)\mathrm{d}s$$

$$F(s,f)=-\alpha^2\sin[f-g(s)]$$

于是 $f=g+u$ 满足方程

$$f(t)+\int_0^1 k(t,s)F[s,f(s)]\mathrm{d}s=0 \tag{1.2-60}$$

式(1.2－60)是一个 **Hammerstein 方程**。

参 考 文 献

1 Петровский И Г. 积分方程论讲义. 北京：高等教育出版社，1954

2 陈传璋等. 积分方程论及其应用. 第1版. 上海：上海科学技术出版社，1987

3 Краснов М Л и др.，Интегральные уравнения，изд 2-е，Москва М.，“Наука”，1976

4 Jerri A J，Introduction to Integral Equations with Applications，New York，Marcel Dekker，Inc.，1985

5 Fröberg，Carl-Erik. Numerical Mathematics. Theory and Computer Applications. California：Behjamin/Cummings. Inc. 1985

6 Logan，J David.，Applied Mathematics. A Contemporary Approach，New York：John

wiley & sons. Inc., 1987

7 Лулье А И. Операционое Исчисление и его Приложения К Задачи Механики 1951

习 题

1. 验证 $\varphi(x)=1-x$ 是积分方程

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = x$$

的解。

2. 验证积分方程

$$\varphi(x) = \int_0^x t^{x-t}\varphi(t)dt \quad (0 \leqslant x, t \leqslant 1)$$

除了零解 $\varphi(x)\equiv 0$ 外，具有形如

$$\varphi(x) = cx^{x-1}$$

的解，式中 c 为任意常数。

3. 验证 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$ 是积分方程

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = 1$$

的解。

4. 把以下微分方程的定解问题化为对应的积分方程。

(1) $\begin{cases} y''+y=\cos x \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y''+(1+x^2)y=\cos x \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y''+4y=f(x) \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(0)=0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y'''+xy''+(x^2-x)y=xe^x+1 \\ y(0)=y'(0)=1, \quad y''(0)=0 \end{cases}$

5. 把下列积分方程化为微分方程的定解问题再求出解来：

(1) $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$

(2) $\int_0^x e^{x+t}\varphi(t)dt = x$

(3) $\varphi(x) = 2\int_0^x \dfrac{2t+1}{(2x+1)^2}\varphi(t)dt + 1$

第二章　第二类 Fredholm 方程

第二类 Fredholm 积分方程，在理论与应用上都有很重要的意义，所以首先对这类方程进行讨论。

对于一般的第二类 Fredholm 积分方程，当参数 λ 的值较小时，可以用逐次逼近法求解。Fredholm 提出了参数 λ 取任意值时，求第二类 Fredholm 方程的方法 - Fredholm 方法。退化核的第二类 Fredholm 方程，可直接化为代数方程组。本章讨论上述求第二类 Fredholm 方程分析解的方法，并建立第二类 Fredholm 方程的基本理论——Fredholm 定理。

对称核及卷积型的第二类 Fredholm 方程将分别在第三章、第五章进行讨论。

§2.1　逐次逼近法

考虑第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{2.1-1}$$

假设 $k(x,t)$ 与 $f(x)$ 分别在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 与 $a\leqslant x\leqslant b$ 内连续，因而是有界函数；$|k(x,t)|\leqslant A$，$|f(x)|\leqslant B$，则对充分小的 λ，可以用逐次逼近法证明方程(2.1-1)的解存在。更一般地，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平方绝对可积，即存在正常数 D，使得

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = D^2$$

同时 $k(x,t)$ 关于 x，t 平方绝对可积，且它的绝对值平方关于单变量的积分是一个有界函数，即存在正常数 C_1，使得

$$\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}t < C_1^2$$

时，上述结论也是成立的。

把方程(2.1-1)记为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.1-2}$$

取 $f(x)$ 为零次近似

$$\varphi_0(x) = f(x) \tag{2.1-3}$$

将 $\varphi_0(x)$ 代入方程(2.1-2)的右端，把所得结果作为一次近似

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t \tag{2.1-4}$$

依次类推，即按下列规则作函数序列 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t \tag{2.1-5}$$

……

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_{n-1}(t)\mathrm{d}t \tag{2.1-6}$$

……

定理 2.1.1 设核 $k(x,t)$ 及自由项 $f(x)$ 连续，$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$，则函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于积分方程(2.1-1)的解 $\bar{\varphi}(x)$。

证明 把式(2.1-3)代入式(2.1-4)，得

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

然后代入式(2.1-5)，得到

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda^2\int_a^b k(x,t)\int_a^b k(t,u)f(u)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

改变上式最后一项的积分顺序，得

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda^2\int_a^b k_2(x,u)f(u)\mathrm{d}u$$

其中
$$k_1(x,t) = k(x,t)$$

$$k_2(x,u) = \int_a^b k_1(x,t)k_1(t,u)\mathrm{d}t$$

类似地可得

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda^2\int_a^b k_2(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \cdots + \lambda^{n-1}\int_a^b k_{n-1}(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda^n\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

其中
$$k_n(x,t) = \int_a^b k_1(x,u)k_{n-1}(u,t)\mathrm{d}u \tag{2.1-7}$$

$k_n(x,t)$ 称为 ***n* 次迭核**。

如果 $\varphi_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限 $\varphi(x)$ 存在，则

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \cdots + \lambda^n\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \cdots \tag{2.1-8}$$

为了证明上述级数的一致收敛性，估计积分 $\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t$，显然

$$|k_2(x,u)| \leqslant \int_a^b |k_1(x,t)k_1(t,u)|\mathrm{d}t \leqslant A^2(b-a)$$

$$|k_3(x,u)| \leqslant \int_a^b |k_1(x,t)k_2(t,u)|\mathrm{d}t \leqslant A^3(b-a)^2$$

……

$$|k_n(x,u)| \leqslant \int_a^b |k_1(x,t)k_{n-1}(t,u)|\mathrm{d}t \leqslant A^n(b-a)^n$$

……

因此
$$\left|\int_a^b |k_n(x,u)f(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant A^n(b-a)^{n-1}\int_a^b |f(u)|\mathrm{d}u \leqslant A^nB(b-a)^n$$

因而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}BA^n|\lambda|^n(b-a)^n$ 是级数(2.1-8)的强级数。当 $|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$ 时，此数项级

数收敛，因而，对这样的 λ，级数式(2.1－8)或$\{\varphi_n(x)\}$一致收敛于函数$\bar{\varphi}(x)$。

对式(2.1－6)，令 $n\to\infty$，得到

$$\bar{\varphi}(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\bar{\varphi}(t)\mathrm{d}t+f(x)$$

因为序列$\{\varphi_n(x)\}$一致收敛，所以积分号下取极限是合理的。于是$\bar{\varphi}(x)$是方程(2.1－1)的解。

还可证明$\bar{\varphi}(x)$是方程(2.1－1)的惟一解。这是因为，如果还存在方程(2.1－1)的另一个解 $\psi(x)$，若取零次近似 $\varphi_0(x)=\psi(x)$，就得到 $\varphi_1(x)=\psi(x)$，$\varphi_2(x)=\psi(x)$，…，$\varphi_n(x)=\psi(x)$，…由于 $\varphi_n(x)$的极限为$\bar{\varphi}(x)$，所以$\bar{\varphi}(x)=\psi(x)$。

由于当$|\lambda|<\dfrac{1}{A\ (b-a)}$时，级数式(2.1－8)收敛，对这样的 λ，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A^n|\lambda|^{n-1}(b-a)^{n-1}$也收敛，此级数是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,t)$的强级数，因为对迭核有$|k_n(x,t)|\leqslant A^n(b-a)^{n-1}$，因而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,t)$一致收敛，设

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,t) \tag{2.1-9}$$

级数(2.1－8)可记为

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,t)\Big\}f(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.1-10}$$

函数 $R(x,t;\lambda)$称为方程(2.1－1)或核 $k(x,t)$的**解核**。

以下给出解核的一般定义。

定义 2.1.1 若对于 λ 的某个值 $\lambda_0(\lambda_0\neq0)$和任意自由项，方程(2.1－1)的解存在且惟一，且这个解由式(2.1－10)表示，则称方程(2.1－1)对于 λ_0 以 $R(x,t;\lambda_0)$为解核。

定理 2.1.2 若方程(2.1－1)的解核存在，则解核必是惟一的。

证明 设对于 λ_0，方程(2.1－1)有两个解核：$R_1(x,t;\lambda_0)$与 $R_2(x,t;\lambda_0)$。因为当 $\lambda=\lambda_0$ 时方程(2.1－1)有惟一解，所以对任意函数 $f(x)$有下列恒等式

$$f(x)+\lambda_0\int_a^b R_1(x,t;\lambda_0)f(t)\mathrm{d}t=f(x)+\lambda_0\int_a^b R_2(x,t;\lambda_0)f(t)\mathrm{d}t$$

记
$$u(x,t)=R_1(x,t;\lambda_0)-R_2(x,t;\lambda_0)$$

就有
$$\int_a^b u(x,t)f(t)\mathrm{d}t=0$$

又由于 $f(t)$是任意的，对于固定的 x，可取

$$f(t)=\overline{u(x,t)}.$$

这样就有

$$\int_a^b|u(x,t)|^2\mathrm{d}t=0$$

从而 $u(x,t)=0$，即 $R_1(x,t;\lambda_0)=R_2(x,t;\lambda_0)$。

这样，如果已知方程(2.1－1)的解核，则由式(2.1－10)就可得到此方程的解。以上我们

仅对满足$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$的$\lambda$确定出解核。在§2.3 Fredholm 方法一节中，将给出解核的另一个解析表达式——Fredholm 公式(2.3-14)。利用此式可以把解核$R(x,t;\lambda)$解析延拓到复数λ平面的任何有限区域(除了使$D(\lambda)=0$成立的某些孤立奇点)。这样，在λ平面的上述区域内，解核总是存在的，因而对λ的任何值，除了上述奇点外，可以用式(2.1-10)得到积分方程(2.1-1)解。

下面给出$\bar{\varphi}(x)$的另一种形式，设

$$\psi_n(x)=\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t \quad n=1,2,\cdots$$

则式(2.1-8)可记为

$$\bar{\varphi}(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\lambda^n \tag{2.1-11}$$

即把$\bar{\varphi}(x)$表示为λ的幂级数形式的解，式(2.1-11)称为方程(2.1-1)的 Neumann 级数。

对解核成立

$$R(x,t;\lambda)=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,u)R(u,t;\lambda)\mathrm{d}u \tag{2.1-12}$$

$$R(x,t;\lambda)=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(u,t)R(x,u;\lambda)\mathrm{d}u \tag{2.1-13}$$

式(2.1-12)可利用式(2.1-9)来证明：

$$\begin{aligned}R(x,t;\lambda)&=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,t)\\&=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,u)k_1(u,t)\mathrm{d}u+\\&\quad\lambda^2\int_a^b k(x,u)k_2(u,t)\mathrm{d}u+\cdots\\&=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,u)[k_1(u,t)+\lambda k_2(u,t)+\cdots]\mathrm{d}u\\&=k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,u)R(u,t;\lambda)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

式(2.1-13)可类似地证明。

逐次逼近法可用来证明某些积分方程解的存在性。如果能求出$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，就求出了积分方程的解；在已知$\{\varphi_n(x)\}$收敛于原方程解的情况下，有限次迭代的结果就给出此积分方程的近似解。

例 2.1.1 求解积分方程

$$\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 x\,t\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

解 在$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1,|x\cdot t|\leqslant 1$，所以$\frac{1}{A(b-a)}=1,\lambda=\frac{1}{2}$，满足条件$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$，因此由式(2.1-11)，方程的解为

$$\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\psi_1(x)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\psi_2(x)+\cdots$$

而

$$\psi_1(x)=\int_0^1 xt\,\frac{5}{6}t\mathrm{d}t=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)x$$

$$\psi_2(x) = \int_0^1 xt\,\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)t\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 x$$

……

$$\psi_n(x) = \int_0^1 xt\psi_{n-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n x$$

因此
$$\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 x + \cdots$$
$$= \frac{5}{6}\left[1 + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots\right]x$$
$$= \frac{5}{6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{6}}x = x$$

对某些积分方程，可利用迭核求出解核，进而可求出积分方程的解来。

例 2.1.2 求方程 $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$ 的解核，并求出方程的解。

解 由于 $k_1(x,t)=xt$，因此

$$k_2(x,t) = \int_0^1 (xu)(ut)\mathrm{d}u = xt\int_0^1 u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}xt$$

$$k_3(x,t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xu)(ut)\mathrm{d}u = \frac{1}{3^2}xt$$

……

$$k_n(x,t) = \frac{1}{3^{n-1}}xt$$

于是
$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} = xt\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{3^{n-1}}$$
$$= xt\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3xt}{3-\lambda} \qquad (|\lambda| < 3)$$

由式(2.1-10)，方程的解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}f(t)\mathrm{d}t$$

特别，当 $f(x)=x$ 时

$$\varphi(x) = x + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}t\mathrm{d}t = \frac{3x}{3-\lambda}$$

下面介绍迭核的表示与性质。

迭核可以用核 $k(x,t)$ 直接表示

$$k_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n-1} k(x,u_1)k(u_1,u_2)\cdots k(u_{n-1},t)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_{n-1}$$

若核 $k(x,t)$ 在域 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant t\leqslant b$ 内平方可积，则所有的迭核 $k_n(x,t)(n\geqslant 2)$ 在上述正方形区域内连续；对正整数 i，j 成立

$$k_i(x,t) = \int_a^b k_j(x,u)k_{i-j}(u,t)\mathrm{d}u \tag{2.1-14}$$

式中 $i=1, 2, \cdots$；$j=1, 2, \cdots$。

若核 $k(x,t)$ 为对称核，即 $k(x,t)=k(t,x)$，则迭核也是对称的：$k_n(x,t)=k_n(t,x)$。

最后给出计算迭核与解核的几个例子。

例 2.1.3 设方程的核 $k(x,t)=x-t$，$a=0$，$b=1$，求迭核。

解 由式(2.1-7)

$$k_1(x,t)=x-t$$

$$k_2(x,t)=\int_0^1(x-u)(u-t)\mathrm{d}u=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}$$

$$k_3(x,t)=\int_0^1(x-u)\left(\frac{u+t}{2}-ut-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}u=-\frac{x-t}{12}$$

$$k_4(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1(x-u)(u-t)\mathrm{d}u=-\frac{1}{12}k_2(x,t)$$

$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right)$$

经归纳，当 $n=2m-1$ 时，$k_{2m-1}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{12^{m-1}}(x-t)$，$m=1,2,\cdots$

当 $n=2m$ 时，$k_{2m}(x,t)=\dfrac{(-1)^{m-1}}{12^{m-1}}\left(\dfrac{x+t}{2}-xt-\dfrac{1}{3}\right)$，$m=1,2,\cdots$

例 2.1.4 设核 $k(x,t)=\mathrm{e}^{\min(x,t)}$，$a=0$，$b=1$，求迭核 $k_1(x,t)$ 与 $k_2(x,t)$。

解

$$\min(x,t)=\begin{cases}x(0\leqslant x\leqslant t)\\t(t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

所以核 $k(x,t)$ 可记为

$$k(x,t)=\begin{cases}\mathrm{e}^x(0\leqslant x\leqslant t)\\\mathrm{e}^t(t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

容易验证此核是对称的，即 $k(x,t)=k(t,x)$。

显然，$k_1(x,t)=k(x,t)$，而

$$k_2(x,t)=\int_0^1k(x,u)k_1(u,t)\mathrm{d}u=\int_0^1k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u$$

其中

$$k(x,u)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & (0\leqslant x\leqslant u)\\\mathrm{e}^u & (u\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

$$k(u,t)=\begin{cases}\mathrm{e}^u & (0\leqslant u\leqslant t)\\\mathrm{e}^t & (t\leqslant u\leqslant 1)\end{cases}$$

由于 $k(x,t)$ 对称，于是 $k_2(x,t)$ 也对称，因此只要对 $x\geqslant t$ 求 $k_2(x,t)$ 即可，当 $x\leqslant t$ 时的表达式可利用对称性得到。当 $x\geqslant t$ 时

$$k_2(x,t)=\int_0^tk(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u+\int_t^xk(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u+$$
$$\int_x^1k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u$$

在区间 $(0,t)$，$u\leqslant t\leqslant x$，因此

$$\int_0^tk(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u=\int_0^t\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}$$

在区间 (t,x)，$t\leqslant u\leqslant x$，于是

$$\int_t^x k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u = \int_t^x \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^t \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{x+t} - \mathrm{e}^{2t}$$

在区间$(x,1)$，$t \leqslant x \leqslant u$，有

$$\int_x^1 k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u = \int_x^1 \mathrm{e}^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}u = (1-x)\mathrm{e}^{x+t}$$

因此　$k_2(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2} + \mathrm{e}^{x+t} - \mathrm{e}^{2t} + (1-x)\mathrm{e}^{x+t} = (2-x)\mathrm{e}^{x+t} - \dfrac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}$

当 $x \leqslant t$ 时 $k_2(x,t)$的表达式可通过 x，t 互换的方法得到

$$k_2(x,t) = k_2(t,x) = (2-t)\mathrm{e}^{t+x} - \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2}$$

于是

$$k_2(x,t) = \begin{cases} (2-t)\mathrm{e}^{x+t} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{2} & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ (2-x)\mathrm{e}^{x+t} - \dfrac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2} & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

下面引进核**互为正交**的概念。已知两个核 $k(x,t)$，$l(x,t)$，如果对定义域内 x，t 任何允许的值都有

$$\int_a^b k(x,u)l(u,t)\mathrm{d}u = 0$$

$$\int_a^b l(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u = 0$$

则称核 $k(x,t)$与 $l(x,t)$在$[a,b]$互为正交。

例如核 $k(x,t)=xt$，$l(x,t)=x^2t^2$ 在$[-1,1]$正交。这是由于

$$\int_{-1}^1 (xu)(u^2t^2)\mathrm{d}u = xt^2\int_{-1}^1 u^3\mathrm{d}u = 0$$

$$\int_{-1}^1 (x^2u^2)(ut)\mathrm{d}u = x^2t\int_{-1}^1 u^3\mathrm{d}u = 0$$

存在与自身正交的核，对于这种核，$k_2(x,t)=0$，显然以后的迭核均为零，于是解核与核 $k(x,t)$相同。例如当 $k(x,t)=\sin(x-2t)$，$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin(x-2u)\sin(u-2t)\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3u) - \cos(x-2t-u)]\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3u) + \sin(x-2t-u)\right)\Big|_{u=0}^{u=2\pi} = 0\end{aligned}$$

由式(2.1-9)，解核等于核本身，即

$$R(x,t;\lambda) = \sin(x-2t)$$

如果 $m(x,t)$与 $n(x,t)$互为正交核，则与核 $k(x,t)=m(x,t)+n(x,t)$对应的解核 $R(x,t;\lambda)$，等于 $m(x,t)$对应的解核 $R_1(x,t;\lambda)$与 $n(x,t)$的解核 $R_2(x,t;\lambda)$之和(请读者自己加以证明)。这个性质可以推广到任意有限个核的情况，如果核 $m^{(1)}(x,t)$，$m^{(2)}(x,t)$，…，$m^{(n)}(x,t)$两两正交，则与它们之和 $k(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{n} m^{(j)}(x,t)$ 相应的解核，等于每个核所对应的解核之和。

例 2.1.5　求核 $k(x,t)=xt+x^2t^2$，$a=-1$，$b=1$ 对应的解核。

解　以前已指出核 $m(x,t)=xt$ 与 $l(x,t)=x^2t^2$ 在$[-1,1]$正交。再分别求出 x^2t^2 对应的

解核 $R_m(x,t;\lambda)=\dfrac{3xt}{3-2\lambda}$，$xt$ 对应的解核 $R_n(x,t;\lambda)=\dfrac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$，因此 $k(x,t)$的解核

$$R_k(x,t;\lambda)=R_m(x,t;\lambda)+R_n(x,t;\lambda)$$
$$=\frac{3xt}{3-2\lambda}+\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}\qquad\left(|\lambda|<\frac{3}{2}\right)$$

§2.2　退化核方程

在第二类 Fredholm 积分方程中，有一类重要的、特殊类型的方程——退化核方程。它本身可以用初等方法，即化为线性代数方程组求解；而对于一般的第二类 Fredholm 方程，如果把它的核用退化核逼近，则它的近似解就可利用求退化核方程的解得到。此外，利用退化核方程，还能使导出一般连续核的 Fredholm 积分方程理论的过程得到简化。

对于第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

如果它的核可以表示成有限项之和，其中每一项都是两个因子的乘积，一个因子仅依赖于 x，另一个仅依赖于 t，即具有以下形式

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t)$$

就称此方程为**退化核方程**。它可表示为

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

即
$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)\qquad(2.2-1)$$

设 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$线性无关；$a_i(x)$，$b_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 连续，记

$$\int_a^b b_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=c_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(2.2-2)$$

则式(2.2-1)化为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ia_i(x)\qquad(2.2-3)$$

因此，为了确定积分方程(2.2-1)的解，只要确定未知常数 c_i 即可。为了得到 c_i 所满足的方程组，可以把式(2.2-3)代入原方程(2.2-1)中去，但把式(2.2-3)直接代入式(2.2-2)，就能更方便地导出 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$满足的方程组来

$$\int_a^b b_i(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_ja_j(t)\right]\mathrm{d}t=c_i$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j\int_a^b b_i(t)a_j(t)\mathrm{d}t=c_i$$

记
$$\int_a^b b_i(t)f(t)\mathrm{d}t=f_i$$
$$\int_a^b b_i(t)a_j(t)\mathrm{d}t=a_{ij}\qquad(2.2-4)$$

就得到 c_i 的线性方程组

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i \tag{2.2-5}$$

例 2.2.1 解退化核方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x\mathrm{ch}\ t - t\mathrm{sh}\ x)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.2-6}$$

解 设

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{ch}\ t\varphi(t)\mathrm{d}t = c_1 \tag{2.2-7}$$

$$\int_{-1}^{1} t\varphi(t)\mathrm{d}t = c_2 \tag{2.2-8}$$

于是

$$\varphi(x) = \lambda x\int_{-1}^{1} \mathrm{ch}\ t\varphi(t)\mathrm{d}t - \lambda\mathrm{sh}\ x\int_{-1}^{1} t\varphi(t)\mathrm{d}t = c_1\lambda x - c_2\lambda\mathrm{sh}\ x \tag{2.2-9}$$

把式(2.2-9)代入式(2.2-7)及(2.2-8)，得

$$\begin{cases} c_1\left(1 - \lambda\displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{ch}\ t\mathrm{d}t\right) + c_2\lambda\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{sh}\ t\mathrm{ch}\ t\mathrm{d}t = 0 \\ -c_1\lambda\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}\ t + c_2\left(1 + \lambda\displaystyle\int_{-1}^{1} t\mathrm{sh}\ t\mathrm{d}t\right) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} c_1(1 - \lambda \cdot 0) + c_2\lambda \cdot 0 = 0 & (2.2-10) \\ -\dfrac{2}{3}c_1\lambda + c_2(1 + 2\lambda\mathrm{e}^{-1}) = 0 & (2.2-11) \end{cases}$$

由式(2.2-10)，$c_1=0$，为得到方程(2.2-6)的非零解，$c_2 \neq 0$，由式(2.2-11)，$\lambda = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$。因此，当 $\lambda = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$ 时方程(2.2-6)有非零解

$$\varphi(x) = -c_2\lambda\mathrm{sh}\ x = c^*\mathrm{sh}\ x$$

式中 $c^* = -c_2\lambda$ 为任意常数。

记系数行列式

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用 Cramer 法则求式(2.2-5)的解，注意到式(2.2-4)，如果记 $n+1$ 阶行列式

$$D(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_n(x) \\ b_1(t) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ b_2(t) & -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n(t) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\mathrm{d}t \\ &= f(x) + \lambda\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

式中 $\dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$就是式(2.1－10)中的解核 $R(x,t;\lambda)$。行列式 $D(x,t;\lambda)$的展开式由 $D(\lambda)$的子式与 $a_j(x)$、$b_i(t)$按一定的方式构成

$$D(x,t;\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varDelta_{ji}a_j(x)b_i(t)$$

式中 $\varDelta_{ji}$是 $D(\lambda)$的第 i 行、第 j 列元素的代数余子式。

如果式(2.2－1)中的 $f(x)$恒等于零，即方程是齐次方程，它有平凡解 $\varphi(x)\equiv 0$，它与式(2.2－5)右端为零时的平凡解 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ 相对应，当 $D(\lambda)\neq 0$ 时，上述解是惟一的。如果 $D(\lambda)=0$，则 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个可任意取值，而其余的 c 值由此确定，于是齐次积分方程(2.2－1)有无限个解存在。

使 $D(\lambda)=0$ 的 λ 值是积分方程的特征值，与它对应的齐次积分方程的任何一个非平凡解(例如 $a_i(x)$)就是此积分方程的特征函数。如果对于一个已知的特征值，常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 中有 m 个可以任意指定，则与此特征值相对应，有 m 个线性无关的特征函数。

如果自由项 $f(x)$不恒等于零，当 $D(\lambda)\neq 0$ 时，非齐次积分方程(2.2－1)对一切 λ 的值有惟一解。

当 $D(\lambda)=0$，如果对所有的 $i(i=1,2,\cdots,n)$都有 $\int_a^b b_i(x)f(x)\mathrm{d}x=f_i=0$，即在$[a,b]$上 $f(x)$与所有的函数 $b_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$正交，则此时式(2.2－5)的右端仍为零，同样，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个可任意取值，而其余的 c 值由它确定。于是非齐次积分方程(2.2－1)的解有无限个，按式(2.2－3)，此解表示为 $f(x)$与特征函数 $a_i(x)$的线性组合之和；如果在 $\int_a^b b_i(x)f(x)\mathrm{d}x=f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个不为零，则非齐次方程组(2.2－5)及非齐次积分方程(2.2－1)无解。

例 2.2.2 讨论下述方程的可解性：

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(1-3xt)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{2.2-12}$$

解 式(2.2－12)是退化核方程。令

$$c_1=\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.2-13}$$

$$c_2=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.2-14}$$

则

$$\varphi(x)=\lambda(c_1-3c_2x)+f(x) \tag{2.2-15}$$

把式(2.2－15)代入式(2.2－13)、(2.2－14)中，得到

$$c_1=\lambda\left(c_1-\frac{3}{2}c_2\right)+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

$$c_2=\lambda\left(\frac{1}{2}c_1-c_2\right)+\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\begin{cases}(1-\lambda)c_1+\dfrac{3}{2}\lambda c_2=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\\[2mm]-\dfrac{1}{2}\lambda c_1+(1+\lambda)c_2=\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{2.2-16}$$

式(2.2-16)的系数行列式

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & \frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(4-\lambda^2)$$

当且仅当 $\lambda\neq\pm 2$ 时，式(2.2-16)有惟一解，从式(2.2-16)解出 c_1, c_2，代入式(2.2-15)就得积分方程(2.2-12)的惟一解；当 $\lambda=2$ 时，式(2.2-16)化为

$$\begin{cases}-c_1+3c_2=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\ -c_2+3c_2=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{2.2-17}$$

当 $\lambda=-2$ 时，式(2.2-16)化为

$$\begin{cases}c_1-c_2=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\ c_1-c_2=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{2.2-18}$$

当 $\lambda=2$ 时，如果 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$，即

$$\int_0^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.2-19}$$

时，式(2.2-17)中的两个方程同解，因此 $c_1=3c_2-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，由式(2.2-15)，$\varphi(x)=A(1-x)-2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+f(x)$，其中 $A=6c_2$ 为任意常数；如果式(2.2-19)不成立，则式(2.2-12)无解。当 $\lambda=-2$ 时，如果 $\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$，即

$$\int_0^1(1-3t)f(t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.2-20}$$

时，类似地可得 $\varphi(x)=B(1-3x)-\frac{3}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+f(x)$，其中 $B=-2c_2$ 为任意常数；如果式(2.2-20)不成立，则式(2.2-12)无解。

特别是，当 $f(x)=0$ 时，如果 $\lambda\neq\pm 2$，则式(2.2-12)有惟一解 $\varphi(x)=0$；如果 $\lambda=2$，由式(2.2-17)，$c_1=3c_2$，再由式(2.2-15)，$\varphi(x)=\lambda 3c_2(1-x)$，于是与 $\lambda=2$ 对应的特性函数为 $1-x$；同样可求出 $\lambda=-2$ 所对应的特征函数为 $1-3x$。

非齐次方程(2.2-12)的解(2.2-15)可表示为

$$\varphi(x)=A_1(1-x)+A_2(1-3x)+f(x)$$

其中 $A_1=\frac{3\lambda(c_1-c_2)}{2}$，$A_2=\frac{\lambda(3c_2-c_1)}{2}$，即解可表示为 $f(x)$ 与特征函数线性组合之和，这个结论对一般类型的第二类 Fredholm 方程也是成立的。

例 2.2.3 解 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$。

解 上述方程是方程(2.2-1)中，$a_1(x)=x$，$b_1(t)=1$，$a_2(x)=1$，$b_2(t)=t$，$n=2$ 的特殊情况，可设解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda(c_1x+c_2) \tag{2.2-21}$$

由式(2.2－5)，c_1，c_2 应满足

$$\begin{cases}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_1-\lambda c_2=f_1\\ -\frac{1}{3}\lambda c_1+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_2=f_2\end{cases} \tag{2.2-22}$$

其中 $f_1=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，$f_2=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$，$a_{11}=\frac{1}{2}$，$a_{12}=1$，$a_{21}=\frac{1}{3}$，$a_{22}=\frac{1}{2}$。

此时

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda\\ -\frac{1}{3}\lambda & 1-\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{12}\lambda^2-\lambda+1$$

$$D(x,t;\lambda)=\begin{vmatrix}0 & -x & -1\\ 1 & 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda\\ t & -\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\left(xt-\frac{x}{2}-\frac{t}{2}+1\right)\lambda+x+t$$

$D(\lambda)=0$ 的根为 $\lambda_1=-6+4\sqrt{3}$，$\lambda_2=-6-4\sqrt{3}$，当 $\lambda\neq\lambda_1$ 且 $\lambda\neq\lambda_2$ 时，积分方程有惟一解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{(-12xt+6x+6t-4)\lambda-12(x+t)}{\lambda^2+12\lambda-12}f(t)\mathrm{d}t$$

当 $\lambda=\lambda_1=-6+4\sqrt{3}$ 时，式(2.2－21)化为

$$\begin{cases}(4-2\sqrt{3})c_1+(6-4\sqrt{3})c_2=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\\ \left(2-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)c_1+(4-2\sqrt{3})c_2=\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(4-2\sqrt{3})c_1+(6-4\sqrt{3})c_2=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t & (2.2-23)\\ (4-2\sqrt{3})c_1+(6-4\sqrt{3})c_2=-\sqrt{3}\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t & (2.2-24)\end{cases}$$

当 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\sqrt{3}\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$，即

$$\int_0^1(1+\sqrt{3}\,t)f(t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.2-25}$$

时，由式(2.2－23)，有

$$(4-2\sqrt{3})c_1=(4\sqrt{3}-6)c_2+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$c_1=\sqrt{3}c_2+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

再由式(2.2－21)，

$$\varphi(x)=A(\sqrt{3}x+1)+f(x)+x\sqrt{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $A = 2\left(-3+2\sqrt{3}\right)c_2$ 为任意常数；如果式(2.2-25)不成立，原方程无解。

类似地可得到，当 $\lambda=\lambda_2=-6-4\sqrt{3}$ 时，在满足条件

$$\int_0^1\left(1-\sqrt{3}t\right)f(t)\mathrm{d}t=0 \tag{2.2-26}$$

时，可求出

$$c_1=-\sqrt{3}c_2+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$\varphi(x)=B\left(1-\sqrt{3}x\right)+f(x)-x\sqrt{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

其中 $B=2\left(-3-2\sqrt{3}\right)c_2$ 为任意常数；如果式(2.2-26)不成立，原方程无解。

§2.3 Fredholm 方法

逐次逼近法提供了在参数 λ 取较小值时，求第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{2.3-1}$$

解的可能性。为了对参数 λ 取任意值时的一般情况求出方程(2.3-1)的解，Fredholm 使用 Volterra 已采用过的想法，用积分和式近似代替积分，把积分方程作为线性代数方程组的极限情况来加以研究。在 1903 年他首先利用所谓 Fredholm 行列式，给出第二类 Fredholm 方程的解，并证明了 Fredholm 方程的基本定理。

下面先介绍 Fredholm 行列式、Fredholm 一级子式的概念，给出方程(2.3-1)解的表达式；讨论积分方程的特征值与特征函数，为§2.4 Fredholm 定理的讨论做准备。

1. Fredholm 行列式 Fredholm 一级子式

设积分方程(2.3-1)的核 $k(x,t)$，自由项 $f(x)$，未知函数 $\varphi(x)$ 在定义域内连续。

把区间 $[a,b]$ 分为 n 等份，每份的长为 $h=\dfrac{b-a}{n}$。设第 j 个分点为 $t_j(j=0,1,2,\cdots,n)$。把方程(2.3-1)中的积分用积分和式代替，则方程(2.3-1)化为近似方程

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k(x,t_j)\varphi(t_j)=f(x)\quad x\in[a,b] \tag{2.3-2}$$

为了确定未知函数 $\varphi(x)$ 在点 $x_j(a\leqslant x_j\leqslant b)$ 的近似值，在式(2.3-2)中设 $x=x_1, x_2, \cdots, x_n$，得到线性代数方程组

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=0}^{n}k_{ij}\varphi_j=f_i\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{2.3-3}$$

式中 $f(x_i)=f_i$，$\varphi(x_i)=\varphi_i$，$k(x_i,t_j)=k_{ij}$。

方程组(2.3-3)的可解性依赖于行列式

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda hk_{11} & -\lambda hk_{12} & \cdots & -\lambda hk_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\lambda hk_{n1} & -\lambda hk_{n2} & \cdots & 1-\lambda hk_{nn}\end{vmatrix}$$

的值。把 $D_n(\lambda)$按 λ 的幂展开

$$D_n(\lambda)=1-\lambda\sum_{i=1}^{n}hk_{ii}+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h^2\begin{vmatrix}k_{ii}&k_{ij}\\k_{ji}&k_{jj}\end{vmatrix}-\cdots$$

设 $D_n(\lambda)$中第 j 列元素 $-\lambda ha_{ji}$的代数余子式为 $D_n(x_i,x_j;\lambda)$，把它也按 λ 的幂展开，得到

$$D_n(x_i,x_j;\lambda)=\lambda hk_{ij}-\lambda^2\sum_{p=1}^{n}h^2\begin{vmatrix}k_{ij}&k_{ip}\\k_{pj}&k_{pp}\end{vmatrix}+\cdots$$

若 $D_n(\lambda)\neq 0$，则由 Cramer 法则，线性方程组(2.3－3)的解为 $\varphi_i=\dfrac{1}{D_n(\lambda)}\sum\limits_{j=1}^{n}D_n(x_i,x_j;\lambda)f_j$。可以预料，当 $n\to\infty$，$h\to 0$ 时，极限形式就给出非齐次积分方程(2.3－1)的解。

由 $D_n(\lambda)$，$D_n(x_i,x_j;\lambda)$的定义及它们的 λ 的乘幂之展开式，可分别求出它们的极限 $D(\lambda)$，$D(x,t;\lambda)$的表达式

$$D(\lambda)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!}C_m\lambda^m \tag{2.3－4}$$

式中

$$C_m=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m}\begin{vmatrix}k(t_1,t_1),\cdots,k(t_1,t_m)\\\vdots\qquad\qquad\vdots\\k(t_m,t_1),\cdots,k(t_m,t_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m \tag{2.3－5}$$

$$D(x,t;\lambda)=k(x,t)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!}B_m(x,t)\lambda^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!}B_m(x,t)\lambda^m \tag{2.3－6}$$

式中　$B_0(x,t)=k(x,t)$

$$B_m(x,t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m}\begin{vmatrix}k(x,t)&k(x,t_1)&\cdots&k(x,t_m)\\k(t_1,t)&k(t_1,t_1)&\cdots&k(t_1,t_m)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k(t_m,t)&k(t_m,t_1)&\cdots&k(t_m,t_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m \tag{2.3－7}$$

以下证明 $D(\lambda)$与 $D(x,t;\lambda)$是在复数 λ 的全平面上的解析(全纯)函数。

记

$$K\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\\t_1&t_2&\cdots&t_m\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}k(x_1,t_1)&k(x_1,t_2)&\cdots&k(x_1,t_m)\\k(x_2,t_1)&k(x_2,t_2)&\cdots&k(x_2,t_m)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k(x_m,t_1)&k(x_m,t_2)&\cdots&k(x_m,t_m)\end{vmatrix}$$

若$|k(x,t)|\leqslant A$，则每行元素的平方和小于 mA^2，由 Hadmard 定理(一个 m 阶行列式的值小于它的各行的元素平方和乘积的平方根[5])得到

$$K\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\\t_1&t_2&\cdots&t_m\end{pmatrix}\leqslant m^{\frac{m}{2}}A^m \tag{2.3－8}$$

而　$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1\,!}\int_a^bK\begin{pmatrix}t_1\\t_1\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1+\frac{\lambda^2}{2\,!}\int_a^b\int_a^bK\begin{pmatrix}t_1,t_2\\t_1,t_2\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2-\cdots+$$

$$(-1)^m \frac{\lambda^m}{m\,!} \underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m} K\begin{pmatrix} t_1,t_2,\cdots t_m\\ t_1,t_2,\cdots t_m\end{pmatrix} \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m + \cdots$$

利用式(2.3-8)得到上述级数每一项的一个估计，由此估计，得出此级数在复变数 λ 的全平面上是内闭绝对一致收敛，因而 $D(\lambda)$ 是一个解析函数。$D(\lambda)$ 称为 **Fredholm 行列式**，或 $k(x,t)$ 的行列式。

类似地，可以证明，$D(x,t;\lambda)$ 的幂级数表示式，在复变数 λ 全平面上内闭绝对一致收敛，因而也是一个解析函数。$D(x,t;\lambda)$ 称为 **Fredholm 一级子式**。当核 $k(x,t)$ 在有界域上为平方可积函数时，Carleman 证明了 $D(\lambda)$ 与 $D(x,t;\lambda)$ 仍为 λ 的解析函数(证明见文献[6])。

2. 第二类 Fredholm 方程解的表达式

下面先建立联系 $D(x,t;\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 的 Fredholm 基本关系式，然后导出第二类 Fredholm 方程解的表达式。

把式(2.3-5)中积分号下的行列式

$$K\begin{pmatrix} x & t_1 & \cdots & t_m\\ t & t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & \cdots & k(x,t_m)\\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k(t_m,t) & k(t_m,t_1) & \cdots & k(t_m,t_m)\end{vmatrix}$$

按第一行展开

$$K\begin{pmatrix} x & t_1 & \cdots & t_m\\ t & t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix} = k(x,t)K\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m\\ t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix} +$$

$$\sum_{n=1}^{m}(-1)^n k(x,t_n)K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n & t_{n+1} & \cdots & t_m\\ t & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_{n+1} & \cdots & t_m\end{pmatrix}$$

于是

$$B_m(x,t) = \underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m} k(x,t)K\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_m\\ t_1 & \cdots & t_m\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m +$$

$$\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m} k(x,t_n)\times$$

$$K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n & t_{n+1} & \cdots & t_m\\ t & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_{n+1} & \cdots & t_m\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

考虑到式(2.3-5)以及上式右端第二项积分号下行列式的第 n 行依次换到第 $n-1$ 行、第 $n-2$ 行、…、第一行时，行列式的值变为原来的 $(-1)^{n-1}$ 倍，而有

$$B_m(x,t) = C_m k(x,t) + \sum_{n=1}^{m}\int_a^b k(x,t_n)\times$$

$$\left(\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m-1} K\begin{pmatrix} t_n & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_{n+1} & \cdots & t_m\\ t & t_1 & \cdots & t_{n-1} & t_{n+1} & \cdots & t_m\end{pmatrix}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\right)\mathrm{d}t_n$$

$$= C_m k(x,t) - \sum_{n=1}^{m}\int_a^b k(x,t_n)B_{m-1}(t_n,t)\mathrm{d}t_n$$

$$=C_m k(x,t) - m\int_a^b k(x,u)B_{m-1}(u,t)\mathrm{d}u \tag{2.3-9}$$

（这是因为对于每一个 n，$\int_a^b k(x,t_n)B_{m-1}(t_n,t)\mathrm{d}t_n = \int_a^b k(x,u)B_{m-1}(u,t)\mathrm{d}u$）

因此，
$$\begin{aligned}
D(x,t;\lambda) &= k(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(x,t)\lambda^m \\
&= k(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}C_m\lambda^m k(x,t) - \\
&\quad \sum_{m=1}^{\infty}\lambda\frac{(-1)^{m-1}\lambda^{m-1}}{(m-1)!}\int_a^b k(x,u)B_{m-1}(u,t)\mathrm{d}u \\
&= k(x,t) + [D(\lambda) - 1]k(x,t) - \int_a^b \lambda k(x,u) \times \\
&\quad \Big[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}B_{m-1}(u,t)\lambda^{m-1}\Big]\mathrm{d}u \\
&= D(\lambda)k(x,t) - \lambda\int_a^b k(x,u) \times \\
&\quad \Big[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(u,t)\lambda^m\Big]\mathrm{d}u \\
&= D(\lambda)k(x,t) - \lambda\int_a^b k(x,u)D(u,t;\lambda)\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{2.3-10}$$

类似地，可得到

$$D(x,t;\lambda) = D(\lambda)k(x,t) - \lambda\int_a^b k(u,t)D(x,u;\lambda)\mathrm{d}u \tag{2.3-11}$$

式(2.3－10)、(2.3－11)称为 **Fredholm 基本关系式**。这样，可以得到如下定理。

定理 2.3.1 设 $f(x)$是$[a,b]$上已知的连续函数，若核 $k(x,t)$在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 连续，且参数 λ 不是 Fredholm 行列式 $D(\lambda)$的零点，则积分方程(2.3－1)有惟一的连续解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t \tag{2.3-12}$$

证明 把方程(2.3－1)中的 x，t 分别用 t，t_1 代替，并移项，可得

$$f(t) = \varphi(t) - \lambda\int_a^b k(t,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1 \tag{2.3-13}$$

若参数 λ 的值使 $D(\lambda)\neq 0$，用 $\lambda\dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$乘式(2.3－13)的两端，再关于 t 从 a 到 b 积分，就有

$$\begin{aligned}
\lambda\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t &= \lambda\int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\varphi(t)\mathrm{d}t - \\
&\quad \lambda\int_a^b\Big[\lambda\int_a^b k(t,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\Big]\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b\Big[\lambda\int_a^b D(x,t;\lambda)k(t,t_1)\mathrm{d}t\Big]\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
&= \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{\lambda}{D(\lambda)} \times \\
&\quad \int_a^b [D(x,t_1;\lambda) - D(\lambda)k(x,t_1)]\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1
\end{aligned}$$

$$=\lambda\int_a^b k(x,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1-\lambda\int_a^b k(x,t_1)\varphi(t)\mathrm{d}t_1=\varphi(x)-f(x)$$

因此，若方程(2.3-1)有解，则可以表示为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t$$

把上式代入方程(2.3-1)两端，可验证它确为方程(2.3-1)的解。由定理2.1.2知，解核是惟一的，把满足$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$时用逐次逼近法求出的解与式(2.1-10)对照，可得到下列Fredholm公式

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\tag{2.3-14}$$

$R(x,t;\lambda)$原来仅对满足$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$的$\lambda$存在，但$\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$在整个复$\lambda$平面上是一个亚纯函数(因为分子、分母均为解析函数)，由广义Liouville定理，解核$R(x,t;\lambda)$可以解析延拓到复数λ的全平面(除了$D(\lambda)=0$的根)，因此Fredholm方程(2.3-1)对所有不是行列式$D(\lambda)$的零点的λ，存在惟一的解(2.3-12)。

由式(2.3-5)及(2.3-7)，显然成立

$$C_{m+1}=\int_a^b B_m(t,t)\mathrm{d}t\tag{2.3-15}$$

这样，可以利用递推关系式(2.3-15)与(2.3-9)来确定系数$B_m(x,t)$和C_m，这样可以避免在利用式(2.3-5)与(2.3-7)时所进行的繁琐计算。

例2.3.1 已知$k(x,t)=xe^t$，$a=0$，$b=1$，求此积分方程的解核及它的解。

解 为了求$D(x,t;\lambda)$，先求$B_m(x,t)$：

$$B_0(x,t)=k(x,t)=xe^t$$

$$B_1(x,t)=\int_0^1\begin{vmatrix}xe^t & xe^{t_1}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1}\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1=0$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2}\\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=0$$

(由于积分号下的行列式为零)，显然所有的$B_n(x,t)=0$，$n=1,2,\cdots$。

为了求$D(\lambda)$，再求C_m。

$$C_1=\int_0^1 k(t_1,t_1)\mathrm{d}t_1=\int_0^1 t_1e^{t_1}\mathrm{d}t_1=1$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2}\\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2}\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=0$$

显然，$C_n=0$，$n=2,3,\cdots$。由式(2.3-4)、(2.3-6)，有

$$D(x,t;\lambda)=k(x,t)=xe^t,\ D(\lambda)=1-\lambda$$

于是

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{xe^t}{1-\lambda}$$

由式(2.3-11)可得方程的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{x e^t}{1-\lambda} f(t) \mathrm{d}t$$

特别是，当 $f(x)=e^{-x}$时，方程的解为

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x$$

用式(2.3－4)、(2.3－6)计算 $B_n(x,t)$，C_n，仅在个别情况下切实可行，通常是由 $C_0=1$，$B_0(x,t)=k(x,t)$，按照式(2.3－15)与(2.3－9)，依次求出 C_1，$B_1(x,t)$；C_2，$B_2(x,t)$，等等。

例 2.3.2 设核 $k(x,t)=x-2t$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$，求解核。

解 由于 $C_0=1$，$B_0(x,t)=k(x,t)=x-2t$，由式(2.3－14)

$$C_1 = \int_0^1 B_0(t,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$$

由式(2.3－7)

$$\begin{aligned} B_1(x,t) &= C_1 k(x,t) - \int_0^1 k(x,u) B_0(u,t) \mathrm{d}u \\ &= -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2u)(u-2t)\mathrm{d}u = -x - t + 2xt + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$C_2 = \int_0^1 B_1(t,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-s - s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} B_2(x,t) &= C_2 k(x,t) - 2\int_0^1 k(x,u) B_1(u,t)\mathrm{d}u \\ &= \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2u)\left(-u-t+2ut+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}u = 0 \end{aligned}$$

$$C_3 = C_4 = \cdots = 0, B_3(x,t) = B_4(x,t) = \cdots = 0$$

由式(2.3－6)、(2.3－4)

$$\begin{aligned} D(x,t;\lambda) &= k(x,t) + (-1)B_1(x,t)\lambda \\ &= (x-2t) + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda \end{aligned}$$

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}$$

因此解核

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}$$

最后，利用式(2.3－15)导出一个在证明下一节引理时要用的、联系 $D(\lambda)$、$D(t,t;\lambda)$的公式。由式(2.3－4)

$$\begin{aligned} D'(\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} C_m \lambda^{m-1} = -C_1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} C_m \lambda^{m-1} \\ &= -C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} C_{m+1}\lambda^m = -\left(C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_{m+1}\lambda^m\right) \end{aligned}$$

而在式(2.3－6)中，令 $x=t$ 且对两端关于 t 积分，根据式(2.3－15)，就有

$$\int_a^b D(t,t;\lambda)\mathrm{d}t = C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_{m+1}\lambda^m$$

因此成立

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(t,t;\lambda)\mathrm{d}t \tag{2.3-16}$$

§2.4 Fredholm 定理

第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{2.4-1}$$

只有在少数情况可以直接求出它的精确解，因此通常要用近似方法求出它的数值解。下面将叙述、证明有关 Fredholm 积分方程可解性(解的情况)的一些定理——Fredholm 定理，它们将为解积分方程提供有价值的信息，为利用近似方法求积分方程近似解提供依据。

1. 特征值与特征函数

(1) 定义　方程(2.4-1)的齐次方程为

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.4-2}$$

对参数 λ 的任意值，它显然有平凡解 $\varphi(x)\equiv 0$，但当 λ 取某些值时，它可能有(不恒等于零的)非平凡解。

定义 2.4.1　使齐次积分方程(2.4-2)有非平凡解的 λ 的值，称为方程(2.4-2)或核 $k(x,t)$ 的**特征值**，对应的非平凡解，称为方程(2.4-2)或核 $k(x,t)$ 的**特征函数**。

显然 $\lambda=0$ 不是特征值，因为此时由式(2.4-2)可推出 $\varphi(x)\equiv 0$。

积分方程的特征值与特征函数有重要的实际意义。

(2) 临界速度问题　在工程上，为了避免不稳定的颤振现象，需要计算"临界速度"。

例如，在§1.2 中线密度为 $\rho(x)$ 的弹性弦，当它们以角速度 ω 绕某一轴做匀速转动，且 ω 达到某一个定值时，该弹性弦就会在转轴附近引起相当大的、不稳定的颤振，此时弦的离心力恰好与弦由于变形而产生的弹性恢复力相互平衡。角速度的这一数值，就是此弹性弦的临界速度。

设弦在旋转时，在坐标为 x 的点处，由强度为 $p(x)$ 的负载所产生的位移 $y(x)$ 由式(1.2-3)给出

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi$$

而由旋转产生的负载(即离心力)分布为

$$p(\xi) = \omega^2 y(\xi)\rho(\xi)$$

因此，弹性恢复力与离心力平衡这种情况，当且仅当对 ω 的某一个值，有一个非零的位移 $y(x)$ 满足(把上述 $p(\xi)$ 的表达式代入式(1.2-3)所得到的)积分方程

$$y(x) = \omega^2\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (0\leqslant x\leqslant l)$$

时出现。记 $\omega^2=\lambda$，就有

$$y(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (0\leqslant x\leqslant l)$$

这样，求此弹性弦的临界速度的问题，就化为寻求 λ 取何值时，上列积分方程有非零解的问题。λ 的上述值，就是此积分方程的特征值。

为了得到 Fredholm 方程的基本定理——Fredholm 定理，下面讨论有关特征值与特征函数的性质。

(3) 特征值与特征函数的性质

性质 1 如果 $\varphi(x)$ 是特征值 λ 对应的特征函数，c 是任意不为零的常数，则 $c\varphi(x)$ 也是此特征值对应的特征函数。

常数 c 可以这样选取，使得 $c\varphi(x)$ 的范数等于 1，即 $\|c\varphi\|=\sqrt{\int_a^b c^2\varphi^2(x)\mathrm{d}x}=1$。称范数为 1 的特征函数为标准化的。以后通常设所有特征函数都按上述方式确定，即都是标准化的。

性质 2 如果 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 是对应于同一特征值 λ 的特征函数，则对任意不同时为零的常数 c_1 与 c_2，函数 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$ 也是此特征值对应的特征函数。

性质 3 如果核 $k(x,t)$ 及特征值 λ 都是实数，则对应的特征函数可以设为实函数。

设 $\varphi(x)=\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ 是 λ 对应的特征函数，把它代入式(2.4－2)分出实部虚部就得到 $\psi_1(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)\mathrm{d}t,\psi_2(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\psi_2(t)\mathrm{d}t$，即实函数 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$ 是 λ 对应的特征函数。

特征值与特征函数对讨论积分方程解的情况，有很重要的作用。以下先给出有关积分方程可解性的几个定理，最后概括为 Fredholm 方程解的基本定理——Fredholm 定理。

定理 2.4.1 当方程(2.4－1)中的 λ 不等于对应齐次方程(2.4－2)的特征值时，如果方程(2.4－1)有解，则解惟一。

证明 设 $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ 是方程(2.4－1)的两个解，则成立

$$\varphi_1(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

$$\varphi_2(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_2(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

于是

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]\mathrm{d}t\equiv 0$$

因而 $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 是齐次方程(2.4－2)的解。由于 λ 不是方程(2.4－2)的特征值，所以 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\equiv 0$，即 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$。证毕。

下面的定理 2.4.2 及定理 2.4.3 将指出 $D(\lambda)$ 的零点 $\lambda=\lambda_0$ 就是核 $k(x,t)$ 的特征值；而 $k(x,t)$ 的特征值是 $D(\lambda)$ 的零点。因此积分方程(2.4－2)的特征值与它的 Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ 的零点密切相关。为了研究它们之间的关系，先讨论 $D(\lambda)$ 与 $D(x,t;\lambda)$ 零点的阶之间的关系。

设 $\lambda=\lambda_0$ 是 $D(\lambda)$ 的零点，对于任何 (x,t)，它可能也是 $D(x,t;t)$ 的零点。

引理 $D(x,t;\lambda)$ 在零点 $\lambda=\lambda_0$ 的阶数 l，低于 $D(\lambda)$ 在零点 $\lambda=\lambda_0$ 的阶数 k。

证明 由于 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的 k 阶零点，于是

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda) \quad (D_0(\lambda) \neq 0) \tag{2.4-3}$$

而 λ_0 是 $D'(\lambda)$的 $k-1$ 阶零点，且同时也是 $D(x,t;\lambda)$的 l 阶零点，即

$$D(x,t;\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l D_0(x,t;\lambda) \tag{2.4-4}$$

式中 $D_0(x,t;\lambda)$是由 $\lambda-\lambda_0$ 的正整数次幂构成的级数，对 x，t 的某些值，$\lambda-\lambda_0$ 的零次项的系数不为零。

由式(2.3-16)及(2.4-4)

$$D'(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l \int_a^b D_0(t,t;\lambda)\mathrm{d}t$$

上式左端以 λ_0 为 $k-1$ 阶零点，右端有$(\lambda-\lambda^0)^l$ 的因子，而 $D_0(t,t;\lambda)$积分后还可能出现 $\lambda-\lambda_0$ 的正整数次幂的因子。所以 $k-1\geqslant l$，因而正整数 $k>l$。即 $D(x,t;\lambda)$在零点 λ_0 的阶数 l 必小于 $D(\lambda)$在零点 λ_0 的阶数 k。

定理 2.4.2 若 λ_0 是方程(2.4-1)的 Fredholm 行列式 $D(\lambda)$的零点，则它是齐次方程(2.4-2)的特征值。

证明 在 $\lambda=\lambda_0$ 的邻域内，分别将 $D(\lambda)$及 $D(x,t;\lambda)$展开为 $\lambda-\lambda_0$ 的幂级数．

$$D(\lambda) = C_k(\lambda - \lambda_0)^k + C_{k+1}(\lambda - \lambda_0)^{k+1} + \cdots \tag{2.4-5}$$

$$D(x,t;\lambda) = B_l(x,t)(\lambda - \lambda_0)^l + B_{l+1}(x,t)(\lambda - \lambda_0)^{l+1} + \cdots \tag{2.4-6}$$

式中 $C_k\neq 0$，$B_l(x,t)$不恒等于零。

把式(2.4-5)及(2.4-6)代入式(2.3-11)

$$\begin{aligned} & B_l(x,t)(x - x_0)^l + B_{l+1}(x,t)(x - x_0)^{l+1} + \cdots \\ = & C_k k(x,t)(\lambda - \lambda_0)^k + C_{k+1}k(x,t)(\lambda - \lambda_0)^{k+1} + \\ & \lambda \int_a^b [B_l(u,t)(\lambda - \lambda_0)^l + B_{l+1}(u,t) \times \\ & (\lambda - \lambda_0)^{l+1} + \cdots]k(x,u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

比较上式两端$(\lambda-\lambda_0)^l$ 的系数，注意到由引理知 $k>l$，且令 $\lambda=\lambda_0$，得到

$$B_l(x,t) = \lambda_0 \int_a^b B_l(u,t)k(x,u)\mathrm{d}u \tag{2.4-7}$$

由于 $B_l(x,t)$不恒等于零，因此总可以选取 $t=t_0$，使 $B_l(x,t_0)$是 x 的函数且不恒等于零，由式(2.4-7)可知，λ_0 是 $\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的特征值，而 $B_l(x,t_0)$就是核 $k(x,t)$的对应于特征值 λ_0 的特征函数。

上述定理的逆命题亦成立，即

定理 2.4.3 若 λ_0 是齐次方程(2.4-2)的特征值，是 λ_0 必是 $D(\lambda)$的零点。

证明 用反证法，若 λ_0 不是 $D(\lambda)$的零点，则由定理 2.3.1，对于任何连续函数 $f(x)$，方程(2.4-1)有惟一解，特别是，齐次方程(2.4-2)只有零解，因此 λ_0 不是方程(2.4-2)的特征值，由此引出矛盾，定理得证。

这样，由定理 2.4.2 及定理 2.4.3，就可得到：$D(\lambda)$的所有零点都是齐次方程(2.4-2)的特征值；反过来，齐次方程(2.4-2)的特征值都是 $D(\lambda)$的零点。

在复变量 λ 平面的任何有限区域内，解析函数 $D(\lambda)$只有有限个零点，因此成立：

定理 2.4.4 在 λ 复平面的任何有限区域内，齐次积分方程(2.4-2)只有有限个特征值。

2. Fredholm 定理

由以上讨论，就可以得到 Fredholm 方程理论的基础——Fredholm 定理。

先引入共轭积分方程的概念。

定义 2.4.2 形如

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b \overline{k(t,x)}\psi(t)\mathrm{d}t + g(x) \qquad (2.4-8)$$

的积分方程，称为积分方程(2.4-1)的**共轭方程**。$\overline{k(t,x)}$称为核 $k(x,t)$的**共轭核**，即把原来的核 $k(x,t)$中的自变量互换，再取复共轭所得到的核。如果 $k(x,t)$为实函数，$k(x,t)$的共轭核就是 $k(t,x)$。式(2.4-8)的齐次方程为

$$\psi(x) = \bar{\lambda}\int_a^b \overline{k(t,x)}\psi(t)\mathrm{d}t \qquad (2.4-9)$$

由于共轭方程的 Fredholm 行列式表达式的系数 C_n，与原方程相应系数的共轭值相同，因而齐次方程(2.4-2)Fredholm 行列式的值，与共轭齐次方程(2.4-9)Fredholm 行列式的值互为复共轭，因而如果 λ 是方程(2.4-2)的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是方程(2.4-9)的特征值，故成立

定理 2.4.5 齐次积分方程(2.4-2)与共轭齐次方程(2.4-9)或者同时只有零解，或者同时有不为零的解。

定理 2.4.6 齐次方程(2.4-2)对应于同一特征值 λ_0 的(线性无关的)特征函数的个数(称为**特征函数的秩**)m 是有限的。

证明 设

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x) \qquad (2.4-10)$$

是对应于特征值 λ_0 的线性无关的特征函数，即齐次方程(2.4-2)的非零解。由于 $\lambda=0$ 不是特征值，函数系(2.4-10)满足等式

$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_0} = \int_a^b k(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \qquad (2.4-11)$$

由于特征函数的(常系数的)线性组合仍是特征函数，于是可以对函数系(2.4-10)正交标准化，即使得

$$\int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\mathrm{d}x = 0, i \neq j$$

$$\int_a^b |\varphi_i(x)|^2\mathrm{d}x = 1 \qquad (2.4-12)$$

因此，可以设式(2.4-10)是一个正交标准化的函数系。对式(2.4-11)两端取复共轭，得到

$$\frac{\overline{\varphi_i(x)}}{\bar{\lambda}_0} = \int_a^b \overline{k(x,t)}\ \overline{\varphi_i(t)}\mathrm{d}t$$

所以$\overline{\varphi_i(t)}/\bar{\lambda}$可以看成$(\overline{k(x,t)})$(作为 t 的函数)关于由有限个函数组成的标准正交系$\overline{\varphi_1(t)}$，$\overline{\varphi_2(t)}$，…，$\overline{\varphi}_m(t)$展开的 Fourier 系数，由 Bessel 不等式

$$\sum_{i=1}^m \left|\frac{\overline{\varphi_i(x)}}{\bar{\lambda}_0}\right| \leqslant \int_a^b \overline{|k(x,t)|^2}\mathrm{d}t$$

即

$$\sum_{i=1}^m \frac{|\overline{\varphi_i(x)}|^2}{|\lambda_0|^2} \leqslant \int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}t$$

由函数系的正交性，上列不等式两端关于 x 积分，就有

$$\frac{m}{|\lambda_0|^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x<\infty$$

即

$$m\leqslant|\lambda_0|^2\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

这样就得到：特征值 λ_0 所对应特征函数的个数是有限的，即特征值 λ_0 的秩是有限的。

还可以证明，齐次方程(2.4－2)的特征值 λ 的秩与方程(2.4－9)的特征值 λ 的秩是相同的，即成立

定理 2.4.7 齐次方程(2.4－2)对应于特征值 λ_0 的特征函数的个数，与共轭齐次方程(2.4－9)特征值 $\overline{\lambda}_0$ 的特征函数的个数相同。

证明 用反证法。设对应于特征值 λ_0，方程(2.4－2)有 m 个正交的特征函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$；方程(2.4－9)有 n 个正交的特征函数 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，$\cdots$，$\psi_n(x)$，设 $m<n$，考虑以下两个互为共轭的积分方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b\Big[k(x,t)-\sum_{j=1}^m\psi_j(x)\,\overline{\varphi_j(t)}\Big]\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.4-13}$$

$$\psi(x)=\lambda_0\int_a^b\Big[\overline{k(t,x)}-\sum_{j=1}^m\overline{\psi_j(t)}\varphi_j(x)\Big]\psi(t)\mathrm{d}t \tag{2.4-14}$$

先证方程(2.4－13)只有零解。为此在它的两端乘以 $\overline{\psi_k(x)}(k=1,2,\cdots,m)$ 并关于 x 积分，且交换积分顺序

$$\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\Big[\lambda_0\int_a^b k(x,t)\,\overline{\psi_k}(x)\mathrm{d}x\Big]\varphi(t)\mathrm{d}t-$$

$$\lambda_0\sum_{j=1}^m\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\mathrm{d}t\int_a^b\psi_j(x)\,\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x$$

由于

$$\varphi(x)=\lambda_0\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

考虑到 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，$\cdots$，$\psi_m(x)$ 为标准正交系，就有

$$\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\overline{\psi_k(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x-\lambda_0\int_a^b\overline{\varphi_k(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

由于 $\lambda_0\neq0$，因此

$$\int_a^b\overline{\varphi_k(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,\cdots,m) \tag{2.4-15}$$

因此方程(2.4－13)与方程 $\varphi(x)=\lambda_0\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 等价，从而(2.4－13)的每个解是一个特征函数，所以它可表示为

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^m C_j\varphi_j(x)$$

上式两边乘以函数 $\overline{\varphi_k(x)}$，并关于 x 从 a 到 b 积分，利用 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$，$\varphi_m(x)$ 的标准正交性，就有

$$\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^m C_j\int_a^b\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x=C_k$$

由式(2.4－15)，$C_k=0$，因而方程(2.4－13)只有零解。

但在另一方面，方程(2.4－14)有非零解。这是由于，当 $\psi_k(x)(k=m+1,\cdots,n)$ 是方程(2.4－9)的特征值 $\bar{\lambda}_0$ 对应的特征函数时，就有

$$\psi_k(x)=\bar{\lambda}_0\int_a^b\overline{k(t,x)}\psi_k(t)\mathrm{d}t$$

再利用 $\psi_1(x)$，…，$\psi_m(x)$，…，$\psi_n(x)$的正交性，可知 $\psi_k(x)(k=m+1,\cdots,n)$ 是方程(2.4－14)的非零解。

但是，方程(2.4－13)与(2.4－14)是互为共轭的方程，由定理 2.4.5 知，它们同时只有零解，或同时有非零解，这就导致了矛盾。

同样，如果设 $m>n$ 也引起矛盾，因此 $m=n$，定理得证。

当 λ 是特征值时，关于非齐次积分方程(2.4－1)的解，成立

定理 2.4.8 若 λ 是核 $k(x,t)$ 的特征值，则非齐次积分方程(2.4－1)可解的充分必要条件是，自由项 $f(x)$ 满足条件

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x=0 \qquad (2.4-16)$$

式中 $\psi_k(x)(k=1,2,\cdots,m)$ 是共轭齐次方程(2.4－9)的特征函数线性无关的完全组。若条件(2.4－16)成立，则方程(2.4－1)有无限个解，它的所有解为

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{m}C_j\varphi_j(x)+\varphi_0(x) \qquad (2.4-17)$$

式中 C_j 为任意常数，$\varphi_0(x)$ 为方程(2.4－1)的任一特解。

证明 必要性 设 $\varphi(x)$ 是方程(2.4－1)的解，则成立恒等式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

两边乘以共轭齐次方程(2.4－9)的特征函数的共轭，关于 x 从 a 到 b 积分，得到

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x-\lambda\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\psi(x)\mathrm{d}x$$

右端第二项积分交换积分顺序，得到

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x-\lambda\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x\right]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

但
$$\lambda\int_a^b k(x,t)\psi(x)\mathrm{d}x=\overline{\psi(t)}$$

所以
$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\mathrm{d}x-\int_a^b\varphi(t)\,\overline{\psi(t)}\mathrm{d}t=0$$

充分性 考虑非齐次积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b\left[k(x,t)-\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)\,\overline{\varphi_j(t)}\right]\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \qquad (2.4-18)$$

由定理 2.4.7 的证明可知，方程(2.4－18)对应的齐次方程(2.4－13)只有零解，因而没有特征值。再由定理 2.3.1，非齐次方程(2.4－18)对任意的自由项 $f(x)$ 可解。

按以前同样的步骤，在方程(2.4－18)两端乘以函数 $\overline{\psi_k(x)}$，并关于 x 从 a 到 b 积分，注意

到 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，…，$\psi_m(x)$为正交函数系，得到

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x + \int_a^b \overline{\psi_k(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

从而

$$\lambda\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x$$

由于成立

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

所以

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

此时方程(2.4－18)正是原方程(2.4－1)，于是它对任意自由项 $f(x)$可解。

当条件(2.4－16)满足时，非齐次方程(2.4－1)的所有解表示为它的任一特解 $\varphi_0(x)$与对应齐次方程(2.4－2)的通解之和

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j\varphi_j(x) + \varphi_0(x)$$

式中 $C_j(j=1,2,\cdots,m)$是任意常数。

因而方程(2.4－1)有无限个解。

综上所述，关于第二类 Fredholm 积分方程(2.4－1)

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

以下结论成立：

Fredholm 第一定理 如果 λ 不是核 $k(x,t)$的特征值，即对应的齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

只有零解，则对于任意(连续的)自由项 $f(x)$，非齐次方程(2.4－1)的解存在且惟一。

Fredholm 第二定理 当参数 λ 取给定值时，齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

与共轭齐次方程(2.4－9)

$$\psi(x) - \bar{\lambda}\int_a^b \overline{k(t,x)}\psi(t)\mathrm{d}t = 0$$

(在实数时为 $\psi(x) - \lambda\int_a^b k(t,x)\psi(t)\mathrm{d}t = 0$) 要么都只有平凡解，要么具有有限个($m$ 个)个数相同的线性无关解：$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_m(x)$；$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，…，$\psi_m(x)$。

Fredholm 第三定理 如果 λ 是核 $k(x,t)$的特征值，则非齐次积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

可解的充要条件是，它的自由项 $f(x)$与共轭齐次方程(2.4－9)线性无关解的完全组 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，…，$\psi_m(x)$正交

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_k(x)}\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

（在实数时为$\int_a^b f(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x = 0$），此即定理 2.4.8。

以上三个定理对讨论第二类 Fredholm 积分方程的可解性非常重要。例如由 Fredholm 第一定理、第二定理，就可以通过证明对应的齐次方程或共轭齐次方程只有平凡解，得出非齐次方程(2.4－1)存在惟一解的结论，这比直接讨论方程(2.4－1)要简要得多。

Carleman 在 1921 年指出，如果 $k(x,t)$，$\varphi(x)$，$f(x)$是平方可积函数，上述 Fredholm 定理仍成立。[6]

此外，Fredholm 还把上述定理加以推广，指出：对于 Fredholm 积分方程组及一类弱奇性核的积分方程，这些定理保持有效。

例 2.4.1 讨论积分方程

$$\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t = \lambda\varphi(x) + f(x) \tag{2.4-19}$$

的可解性。

解 当 $\lambda\neq 0$ 时

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda}f(x) \tag{2.4-20}$$

考虑它的共轭齐次方程

$$\psi(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 tx\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}x\int_0^1 t\psi(t)\mathrm{d}t \tag{2.4-21}$$

令

$$\int_0^1 t\psi(t)\mathrm{d}t = c \tag{2.4-22}$$

则 $\psi(x)=\frac{1}{\lambda}cx$，把它代入式(2.4－22)中，就有

$$\int_0^1 t\,\frac{1}{\lambda}ct\mathrm{d}t = c$$

即

$$c\left(\frac{1}{3\lambda} - 1\right) = 0$$

因此方程(2.4－21)的特征值$\frac{1}{\lambda}=3$，特征函数为 $3x$；而式(2.4－20)的齐次方程的特征值$\frac{1}{\lambda}$亦是 3，特征函数亦为 $3x$。

(1) 当$\frac{1}{\lambda}\neq 3$，即 $\lambda\neq\frac{1}{3}$时，方程(2.4－20)存在惟一解；

(2) 当$\frac{1}{\lambda}=3$，即 $\lambda=\frac{1}{3}$时，方程(2.4－20)在 $f(x)$满足 $\int_0^1 f(x)3x\mathrm{d}x = 0$ 时可解，解为 $\varphi(x)=3cx-3f(x)$；如果 $\int_0^1 f(x)\cdot 3x\mathrm{d}x \neq 0$，则方程(2.4－20)无解。

当 $\lambda=0$ 时，方程(2.4－19)成为

$$x\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{2.4-23}$$

即 $f(x)=ax$，式中 a 是常数 $\int_0^1 f\varphi(t)\mathrm{d}t$。

(1) 当 $f(x)$是形如 ax 的线性函数时，方程(2.4－23)的解存在，但不惟一；

(2) 当 $f(x)$不是形如 ax 的线性函数时，方程(2.4－23)无解。

例 2.4.2 求下列方程的特征值与特征函数：

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (2.4-24)$$

解　由式(2.4－24)

$$\varphi(x) = \lambda\left[\cos^2 x\int_0^\pi \cos 2t\ \varphi(t)\mathrm{d}t + \cos 3x\int_0^\pi \cos^3 t\ \varphi(t)\mathrm{d}t\right]$$

记
$$c_1 = \int_0^\pi \cos 2t\ \varphi(t)\mathrm{d}t,\ c_2 = \int_0^\pi \cos^3 t\ \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad (2.4-25)$$

则
$$\varphi(x) = \lambda c_1 \cos^2 x + \lambda c_2 \cos 3x \qquad (2.4-26)$$

把式(2.4－26)代入式(2.4－25)中，得到

$$\begin{cases} c_1\left(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^2 t\cos 2t\mathrm{d}t\right) - c_2\lambda \int_0^\pi \cos 3t\cos t\mathrm{d}t = 0 \\ -c_1\lambda \int_0^\pi \cos^5 t\mathrm{d}t + c_2\left(1 - \lambda \int_0^\pi \cos^3 t\cos 3t\mathrm{d}t\right) = 0 \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} c_1\left(1 - \lambda \dfrac{\pi}{4}\right) - c_2\lambda \cdot 0 = 0 \\ -c_1\lambda \cdot 0 + c_2\left(1 - \lambda \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

因此特征值 $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$，$\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$。

当 $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$时，$0 \cdot c_1 = 0$，$\frac{1}{2}c_2 = 0$，所以 $c_2 = 0$，c_1 为任意，因此 $\varphi(x) = c_1\lambda \cdot \cos^2 x$，取 $c_1\lambda = 1$，求出特征函数 $\varphi_1(x) = \cos^2 x$。同样，当 $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$时，可求出 $c_1 = 0$，c_2 为任意，因此 $\varphi(x) = c_2\lambda\cos 3x$，取 $c_2\lambda = 1$，求出特征函数 $\varphi_2(x) = \cos 3x$。

例 2.4.3　求下述方程的解

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x + t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos 3x \qquad (2.4-27)$$

解　方程(2.4－27)的核 $\cos(x+t) = \cos x\cos t - \sin x\sin t$，所以是退化核。

$$\varphi(x) = \lambda\cos x\int_0^\pi \cos t\ \varphi(t)\mathrm{d}t - \lambda\sin x\int_0^\pi \sin t\ \varphi(t)\mathrm{d}t + \cos 3x$$

设
$$c_1 = \int_0^\pi \cos t\ \varphi(t)\mathrm{d}t,\ c_2 = \int_0^\pi \sin t\ \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad (2.4-28)$$

则
$$\varphi(x) = c_1\lambda\cos x - c_2\lambda\sin x + \cos 3x \qquad (2.4-29)$$

把式(2.4－29)代入式(2.4－28)，经简单计算可得

$$c_1\left(1 - \lambda \frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad c_2\left(1 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (2.4-30)$$

当 $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$，$c_1 = 0$，$c_2 = 0$，方程(2.4－27)有惟一解

$$\varphi(x) = \cos 3x$$

当 $\lambda = \frac{2}{\pi}$时，方程组(2.4－30)成为

$$c_1 \cdot 0 = 0,\quad c_2 \cdot 2 = 0$$

于是 c_1 为任意常数，$c_2 = 0$，因此

$$\varphi(x) = c_1 \frac{2}{\pi}\cos x + \cos 3x = \tilde{c} \cos x + \cos 3x$$

式中 $\tilde{c}\cos x$ 为方程(2.4－27)的齐次方程的通解；$\cos 3x$ 为方程(2.4－27)的一个解。当 $\lambda=-\frac{2}{\pi}$时，方程组(2.4－30)成为

$$2c_1 = 0, \quad 0 \cdot c_2 = 0$$

于是 c_2 为任意常数，$c_1=0$，因此

$$\varphi(x) = - c_2\left(- \frac{2}{\pi}\right)\sin x + \cos 3x = \tilde{\tilde{c}} \sin x + \cos 3x$$

以下讨论方程（2.4－27）解的个数，由于方程(2.4－27)的共轭齐次方程为

$$\psi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(t + x)\psi(t)\mathrm{d}t = 0$$

它的解为 $\psi(x)=c_1\lambda\cos x-c_2\lambda\sin x$，它的线性无关的解组为 $\cos x$，$\sin x$。当 $\lambda=\pm\frac{2}{\pi}$时，由于 $\int_0^\pi\cos 3x\cos x\mathrm{d}x = 0$ 及 $\int_0^\pi\cos 3x\sin x\mathrm{d}x = 0$ 恒满足，因此方程(2.4－27)有无穷个解。

3. 弱奇性核方程

对于形如

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x - t|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

的**弱奇性核**，式中 $h(x,t)$为有界函数，施行积分运算，记迭核

$$K_{p+q}(x,t) = \int_a^b K_p(x,u)K_q(u,t)\mathrm{d}t$$

$$K_1(x,t) = k(x,t)$$

则只要 $p+q>\frac{1}{1-\alpha}$，$K_{p+q}(x,t)$就是一个有界核了，这样弱奇性就被消除，因此，弱奇性核的积分方程具有 Fredholm 方程的所有性质和结论。

参 考 文 献

1 Parton V. Integral Equations in Elasticity. Moscow: Mir pubs USSR, 1982

2 Pearson, Carl E. ed. Handbook of Applied Mathematics, 2nd ed., New York: Van Nostrand Reinhold co., 1983.

3 Краснов, М. Л. И Др., Интегральные Уравнения, Изд 2-е, Москва: "Наука", 1976.

4 Goursat, Édouard., Integral Equations, Calculus of Variations, New York: Dover Publications, Inc., 1964.

5 斯米尔诺夫著. 高等数学教程. V.3－1: §16

6 Math Zeitschrift. V. 9: H. 3/4, 1921

习　题

1. 用逐次逼近法解下列积分方程

(1) $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^1(t+x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x)=x-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x)=\sin x+\lambda\int_0^{2\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

2. 求下列核 $k(x,t)$ 在 $[a,b]$ 上的迭核。

(1) 已知 $k(x,t)=x-t$，$a=-1$，$b=1$

(2) 已知 $k(x,t)=\sin(x-t)$，$a=0$，$b=\frac{\pi}{2}$，求 k_2，k_3。

(3) 已知 $k(x,t)=\mathrm{e}^{|x|+t}$，$a=-1$，$b=1$

(4) 已知 $k(x,t)=x\mathrm{e}^t$，$a=0$，$b=1$

(5) 已知 $k(x,t)=\begin{cases}x+t,(0\leqslant x\leqslant t)\\ x-t,(t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$，求 $k_2(x,t)$。

3. 求下列退化核方程的解。

(1) $\varphi(x)-4\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\varphi(t)\mathrm{d}t=2x-\pi$

(2) $\varphi(x)-\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\arcsin x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\tan x$

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\cos(q\ln t)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

(4) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi/2}\sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin x$

(5) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\arccos t\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}|\pi-t|\sin x\,\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

(7) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\cos t-\sin 2x\cos 2t+\sin 3x\cos 3t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\cos x$

4. 求下列齐次退化核积分方程的特征值与特征函数。

(1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi/4}\sin^2 x\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(4) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(5) $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^1(5xt^3+4x^2t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(6) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(45x^2\ln t-9t^2\ln x)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(7) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(xt-2x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

5. 求下列方程的 Fredholm 行列式及 Fredholm 一级子式。

(1) $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t$

6. 验证：如果

$$k(x,t) = f_1(x)f_2(t) \quad 且 \quad \int_a^b f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = A$$

则
$$D(\lambda) = 1 - \lambda A,\ D(x,t;\lambda) = f_1(x)f_2(t)$$

并求对应的积分方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

解的表达式。

7. 试证：如果核

$$k(x,t) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)g_m(t)$$

则 $D(\lambda)$是 λ 的 n 次多项式。

8. 利用 Fredholm 行列式求下列核的解核。

(1) $k(x,t)=2x-t$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$

(2) $k(x,t)=\sin x\cos t$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 2\pi$

(3) $k(x,t)=x^2t-xt^2$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$

9. 用递推关系式求下列核的解核。

(1) $k(x,t)=1+3xt$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$

(2) $k(x,t)=\mathrm{e}^{x-t}$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$

(3) $k(x,t)=x+t+1$，$-1\leqslant x$，$t\leqslant 1$

(4) $k(x,t)=\sin(x+t)$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 2\pi$

(5) $k(x,t)=4xt-x^2$，$0\leqslant x$，$t\leqslant 1$

10. 利用迭核求下列核的解核。

(1) $k(x,t)=x\mathrm{e}^t$，$a=0$，$b=1$

(2) $k(x,t)=x^2t^2$，$a=-1$，$b=1$

(3) $k(x,t)=\sin x\cos t$，$a=-1$，$b=\dfrac{\pi}{2}$

(4) $k(x,t)=(1+x)(1-t)$，$a=-1$，$b=0$

(5) $k(x,t)=\mathrm{e}^{x+t}$，$a=0$，$b=1$

(6) $k(x,t)=xt$，$a=-1$，$b=1$

(7) $k(x,t)=1+(2x-1)(2t-1)$，$a=0$，$b=1$

(8) $k(x,t)=\sin x\cos t+\cos 2x\sin 2t$，$a=0$，$b=2\pi$

(9) $k(x,t)=\dfrac{x}{1+t^2}$，$a=0$，$b=1$

11. 利用解核解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos 2x$

(2) $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = x$

(3) $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x + t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 1$

(4) $\varphi(x) + \int_0^1 \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$

(5) $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (1-3xt)\varphi(t)\mathrm{d}t = 1$

12. 设核 $k(x,t)$ 的解核为 $R(x,t;\lambda)$，求证：方程

$$\varphi(x) - \mu\int_a^b R(x,t;\lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

的解核为 $R(x,t;\lambda+\mu)$。

13. 设

$$\varphi_0(x) = f(x), \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

若
$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

则
$$\varphi(x) - \lambda^n\int_a^b k_n(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi_n(x)$$

14. 按 λ 所取的不同值，讨论下列积分方程的可解性。

(1) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} |x-\pi|\varphi(t)\mathrm{d}t = x$

(2) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \cos^2 x\varphi(t)\mathrm{d}t = 1$

(3) $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{1} (x^2-2xt)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^3 - x$

(4) $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{1} xe^t\varphi(t)\mathrm{d}t = x$

(5) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi} - \cos x\cos t + \frac{1}{\pi} - \sin 2x\sin 2t\right)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$

(6) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$

15. 当参数 λ，α，β 取怎样的值时，下列积分方程可解？

(1) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi/2} xt\varphi(t)\mathrm{d}t = \alpha x + \beta\sin x$

(2) $\varphi(x) - \lambda\int_{-1}^{1} xt\varphi(t)\mathrm{d}t = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

16. 求方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\cos t - x\sin t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos x$$

的解；并讨论解与参数 λ 之值的关系。

17. 问参数 a 在什么范围时，方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (ax-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

对任何实数 λ 及 $[0,1]$ 上任何连续函数 $f(t)$ 可解？

18. 讨论方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (2xt-4x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = 1-2x$$

的可解性；若有解，求出解来。

19. 如果 $m(x,t)$ 与 $n(x,t)$ 互为正交核，它们的解核分别为 $R_1(x,t;\lambda)$ 与 $R_2(x,t;\lambda)$，则 $k(x,t)=m(x,t)+n(x,t)$ 对应的解核

$$R(x,t;\lambda) = R_1(x,t;\lambda) + R_2(x,t;\lambda)$$

20. 设 $\varphi(x)$ 满足积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + F(x)$$

式中 $k(x,t)$ 为实连续核，但不一定对称，试证 $\varphi(x)$ 满足下列对称核方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k_1(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

式中

$$f(x) = F(x) - \lambda \int_a^b k(u,x)F(u)\mathrm{d}u$$

$$k_1(x,t) = k(x,t) + k(t,x) - \lambda \int_a^b k(u,x)k(u,t)\mathrm{d}u$$

第三章　对称核方程

本章主要讨论解第二类 Fredholm 积分方程的另一种方法 — Hilbert-Schmidt 方法，它的基本思想是把实际中常见的对称核方程的解，表示为对应齐次方程特征函数的级数。Schmidt 在 Fredholm 研究的基础上，建立了对称核方程的基本理论。

本章首先给出对称核方程特征值与特征函数的基本性质，并介绍把这种方程的特征值问题化为常微分方程特征值问题的方法；讨论 Hilbert-Schmidt 展开定理，利用它导出对称核方程解的 Hilbert-Schmidt 公式；证明数学物理中重要的 Steklov 展开定理；讨论对称核的第一特征值及次一特征值。此外，还讨论了如何利用 Green 函数把常微分方程的边值问题化为对应的积分方程。

§3.1　对称核方程及它的性质

如果第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.1-1}$$

的核 $k(x,t)$ 与它的共轭核 $\overline{k(t,x)}$ 相同，则称核 $k(x,t)$ 为 **Hermite 核**。若 Hermite 核是实函数，则有 $k(x,t)=k(t,x)$，称为**对称核**。

对称核方程是数学物理中常见的一种积分方程。这是因为在实际问题中，积分方程经常是从常微分方程某个自共轭齐次边值问题引出来的，积分方程的核是常微分方程边值问题的 Green 函数，而 Green 函数关于其中的两个自变量是对称的，因此所引出的积分方程是对称核方程。

由 §2.1 可知，若 $k(x,t)$ 是对称核，则它的任何迭核是对称的，因而它的解核也是对称的。

为了叙述简便，以下讨论限于核 $k(x,t)$ 是在 $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ 连续的实函数的情况。

对称核方程(3.1-1)的特征值与特征函数，有以下重要的性质

定理 3.1.1　若对称核方程(3.1-1)的核连续且不恒等于零，则它至少具有一个特征值。

证明　如能证明解核级数

$$R(x,t;\lambda)=k_1(x,t)+k_2(x,t)\lambda+k_3(x,t)\lambda^2+\cdots \tag{3.1-2}$$

不是对 λ 的所有值一致收敛，就可以得出对称核 $k(x,t)$ 至少有一个特征值的结论。

用反证法，即设对于任何 λ，级数(3.1-2)在 $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ 一致收敛，则对 λ 的所有值，级数

$$k_2(x,x)\lambda+k_3(x,x)\lambda^2+\cdots \tag{3.1-3}$$

在 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致收敛。

级数(3.1-3)的每项都是连续函数，可以逐项积分。称

$$A_n=\int_a^b k_n(x,x)\mathrm{d}x \tag{3.1-4}$$

为**核 $k(x,t)$ 的 n 次迹**，式中 $k_n(x,t)$ 为 $k(x,t)$ 的 **n 次迭核**。于是，级数

$$A_2\lambda + A_3\lambda^2 + \cdots \tag{3.1-5}$$

对 λ 的所有值收敛。由于式(3.1-5)是 λ 的幂级数，所以它一定绝对收敛，因此它的部分项组成的级数

$$A_2\lambda + A_4\lambda^3 + A_6\lambda^5 + \cdots \tag{3.1-6}$$

对 λ 的所有值收敛。

由于 $k(x,t)$ 为对称核，利用由式(2.1-14)所得出的

$$k_{n+m}(x,t) = \int_a^b k_n(x,u)k_m(u,t)\mathrm{d}u$$

可得到

$$A_{n+m} = \int_a^b \int_a^b k_n(x,u)k_m(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x \tag{3.1-7}$$

特别，成立

$$A_{2n} = \int_a^b \int_a^b [k_n(x,u)]^2\mathrm{d}u\mathrm{d}x \tag{3.1-8}$$

设 p、q 为任意实参数，显然成立

$$\int_a^b \int_a^b [pk_{n+1}(x,u) + qk_{n-1}(x,u)]^2\mathrm{d}u\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{3.1-9}$$

式(3.1-9)中的被积函数展开后再积分，得到

$$p^2A_{2n+2} + 2pqA_{2n} + q^2A_{2n-2} \geqslant 0$$

上式左端为 p、q 的正定二次型，因此

$$A_{2n+2} \cdot A_{2n-2} - A_{2n}^2 \geqslant 0 \tag{3.1-10}$$

由 $k_n(x,t)$ 的对称性及式(3.1-8)，可知 $k(x,t)$ 的偶次迹 A_{2n}，A_{2n-2} 均为正数，因此由式(3.1-10)可得

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \geqslant \frac{A_{2n}}{A_{2n-2}} \tag{3.1-11}$$

于是级数(3.1-6)相邻二项之比为 $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}}\lambda^2$，由式(3.1-11)可知 $\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}}\lambda^2 \geqslant \frac{A_4}{A_2}\lambda^2$，令 $\lambda = \sqrt{\frac{A_2}{A_4}}$，可知级数(3.1-6)发散，于是引起矛盾，定理证毕。

推论 在定理 3.1.1 的假设下，对于特征值 λ 成立 $|\lambda| \leqslant = \sqrt{\frac{A_2}{A_4}}$，式中 A_n 为核 $k(x,t)$ 的 n 次迹。

对于非对称核，定理 3.1.1 不成立。

例 3.1.1 试证方程 $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$ 没有特征值。

证明 方程可化为

$$\varphi(x) = \lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

令

$$c = \int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-12}$$

于是

$$\varphi(x) = \lambda(3x-2)c \tag{3.1-13}$$

把式(3.1-13)代入式(3.1-12)，得到

$$c\left[1-\lambda\int_0^1(3t^2-2t)\mathrm{d}t\right]=0$$

由于 $\int_0^1(3t^2-2t)\mathrm{d}t=0$ ，所以 $c=0$。因此 $\varphi(x)\equiv0$，所讨论的方程无特征值。

定理 3.1.2 对称核不同特征值 λ_1、λ_2 所对应的特征函数在$[a,b]$正交，即

$$\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=0$$

证明 由假设

$$\varphi_1(x)-\lambda_1\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)dt$$

所以

$$\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)=\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)dt \tag{3.1-14}$$

类似地

$$\frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(x)=\int_a^b k(x,t)\varphi_2(t)dt \tag{3.1-15}$$

式(3.1-14)乘以 $\varphi_2(x)$，式(3.1-15)乘以 $\varphi_1(x)$，关于 x 从 a 到 b 积分，再相减

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t\right]\varphi_2(x)\mathrm{d}x-$$

$$\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\varphi_2(t)\mathrm{d}t\right]\varphi_1(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t\right]\varphi_2(x)\mathrm{d}x-$$

$$\int_a^b\left[\int_a^b k(t,x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_1(t)\mathrm{d}t$$

第二项积分中变量 x，t 互换，由于 $k(t,x)=k(x,t)$，所以

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=0$$

但$\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\neq0$，因此

$$\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=0$$

定理 3.1.3 对称核的所有特征值都是实数。

证明 设 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta(\beta\neq0)$是对称核 $k(x,t)$的复特征值，而 $\varphi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_2(x)$是 λ 对应的复特征函数。于是

$$\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_2(x)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)\int_a^b k(x,t)[\psi_1(t)+\mathrm{i}\psi_2(t)]\mathrm{d}t$$

由此得到

$$\psi_1(x)=\alpha\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)\mathrm{d}t-\beta\int_a^b k(x,t)\psi_2(t)\mathrm{d}t$$

$$\psi_2(x)=\alpha\int_a^b k(x,t)\psi_2(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b k(x,t)\psi_1(t)\mathrm{d}t$$

因而

$$\psi_1(x)-\mathrm{i}\psi_2(x)=(\alpha-\mathrm{i}\beta)\int_a^b k(x,t)[\psi_1(t)-\mathrm{i}\psi_2(t)]\mathrm{d}t$$

这样，$\bar{\lambda}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 与$\overline{\varphi(x)}=\psi_1(x)-\mathrm{i}\psi_2(x)$也分别是 $k(x,t)$的特征值与特征函数。由于 $\beta\neq0$，$\bar{\lambda}\neq\lambda$，由定理 3.1.2，不同特征值 λ、$\bar{\lambda}$ 对应的特征函数 $\varphi(x)$、$\overline{\varphi(x)}$互相正交，即

$$\int_a^b\varphi(x)\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b[\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x)]\mathrm{d}x=0$$

由 $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$的连续性，得出 $\psi_1(x)\equiv\psi_2(x)\equiv 0$，因此 $\varphi(x)\equiv 0$，但这是不可能的。

再由§2.4的性质3可知，对称核的特征值与特征函数都是实的。而非对称核的特征值可能是复数。

例 3.1.2 试证积分方程 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(\sqrt{x}\,t-\sqrt{t}\,x)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$ 没有实的特征值。

证明 由原方程，可得

$$\varphi(x)=\lambda\left(\sqrt{x}\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_0^1\sqrt{t}\,\varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

令

$$c_1=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t,\ c_2=\int_0^1\sqrt{t}\,\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-16}$$

于是 $\varphi(x)=c_1\lambda\sqrt{x}-c_2\lambda x$，把它代入式(3.1-16)，就有

$$\begin{cases}\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)c_1+\frac{\lambda}{3}c_2=0\\ -\frac{\lambda}{2}c_1+\left(1+\frac{2}{5}\lambda\right)c_2=0\end{cases}$$

为使以上线性方程组有非零解，必须

$$\begin{vmatrix}1-\frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3}\\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2}{5}\lambda\end{vmatrix}=1-\frac{4}{25}\lambda^2+\frac{\lambda^2}{6}=1+\frac{\lambda^2}{150}=0 \tag{3.1-17}$$

但式(3.1-17)没有实根，因此所讨论的齐次积分方程没有实的特征值

定理 3.1.4 在 λ 轴的每一个有限区间内，对称核 $k(x,t)$存在有限个特征值；在区间$[-l,l]$内，特征值的个数 m 满足下列不等式

$$m\leqslant l^2A^2$$

式中

$$A=\sqrt{\int_a^b\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t}$$

证明 用反证法证定理的前半部分。设某个区间$[M,N]$内有无限个特征值，在其中取特征值的无限序列$\{\lambda_n\}$，并设对应的特征函数序列为$\{\varphi_n(x)\}$，则成立

$$\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}=\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-18}$$

而特征函数系$\{\varphi_n(x)\}$是正交的，因此上式左端可以看为核 $k(x,t)$关于标准正交系$\{\varphi_n(x)\}$的 Fourier 系数，由 Bessel 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t$$

于是，对任何正整数 p 成立

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t$$

上列不等式关于 x 从 a 到 b 积分，得到

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.1-19}$$

由于所有的 λ_n 位于有限区间$[M,N]$，因此

$$\lambda_n^2 \leqslant K^2$$

式中　$K^2 = \max\{M^2, N^2\}$

在和式 $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\lambda_n^2}$ 中的每一项都用$\frac{1}{K^2}$代替，就有

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{K^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

对任何 p 成立。但对充分大的 p，$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{K^2}$ 将大于$\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = A^2$，这就导致矛盾。故所作假设不成立。

设在$[-l,l]$中特征值的个数为 m，在式(3.1－19)中令 $p=m$，由于$|\lambda_n| \leqslant l(n=1,2,\cdots,m)$，所以 $m \leqslant l^2A^2$。

由定理 3.1.4 直接可得到：

(1) 对称核的特征值为有限或可列个，可按绝对值增加的顺序排列为 λ_1，λ_2，…，λ_n，…。

(2) 如果特征值为可列个，则当 $n \to \infty$时$|\lambda_n| \to +\infty$。

定理 3.1.5　对称核的每一个特征值 λ，对应于有限个(q 个)线性无关的特征函数：$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_q(x)$。

证明　设特征值 λ 对应的特征函数有无限个：$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…，由 Bessel 不等式，对任何正整数 p，成立

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda^2} \leqslant \int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t$$

上列不等式关于 x 从 a 到 b 积分，注意到特征函数系的标准正交性，就得到对任何正整数 p，成立

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\lambda^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b k(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \text{即 } p \leqslant \lambda^2 \int_a^b \int_a^b k(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

但这是不可能的。故假设不成立。

若对称核积分方程(3.1－1)的核是某一个常微分方程的齐次 Sturm-Liouville 问题的 Green 函数，则求此对称核 $k(x,t)$的特征值与特征函数的问题，就化为对应的常微分方程的 **Sturm-Liouville 问题**。

例 3.1.3　求 $\varphi(x) - \lambda\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$ 的特征值与特征函数，其中

$$k(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \cos t \sin x & (t \leqslant x \leqslant \pi) \end{cases}$$

解　由于

$$k(t,x) = \begin{cases} \cos t \sin x & (0 \leqslant t \leqslant x) \\ \cos x \sin t & (x \leqslant t \leqslant \pi) \end{cases}$$

所以 $k(x,t)$是对称核。

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_x^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\sin x\int_0^x \cos t\, \varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\cos x\int_x^\pi \sin t\varphi(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\varphi'(x) = \lambda\cos x\int_0^x \cos t\,\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\sin x\varphi(x)\cos x +$$

$$\lambda\cos x\left[-\sin x\varphi(x) - \lambda\sin x\int_x^\pi \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lambda\cos x\int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \lambda\sin x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x) = -\lambda\sin x\int_0^x \varphi(t)\cos t\mathrm{d}t + \lambda\cos^2 x\varphi(x) -$$

$$\lambda\cos x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\mathrm{d}t + \lambda\sin^2 x\varphi(x)$$

$$= \lambda\varphi(x) - \lambda\left[\sin x\int_0^x \varphi(t)\cos t\mathrm{d}t + \cos x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\mathrm{d}t\right]$$

$$= (\lambda - 1)\varphi(x)$$

因此，对应的 Sturm-Liouville 问题为

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0,\ \varphi(\pi) = 0,\ \varphi'(0) = 0$$

(1) 当 $\lambda - 1 = 0$，即 $\lambda = 1$ 时，方程为 $\varphi''(x) = 0$，它的通解为 $\varphi(x) = c_1x + c_2$，利用边界条件得 $c_1 = 0$，$c_2 = 0$，于是积分方程只有平凡解 $\varphi(x) \equiv 0$

(2) 当 $\lambda - 1 > 0$，即 $\lambda > 1$ 时，微分方程的通解

$$\varphi(x) = c_1\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda - 1}x) + c_2\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda - 1}x)$$

于是 $\varphi'(x) = \sqrt{\lambda - 1}(c_1\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda - 1}x) + c_2\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda - 1}x))$，由边界条件

$$\begin{cases} c_1\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda - 1}\pi) + c_2\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda - 1}\pi) = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

于是 $c_1 = 0$，$c_2 = 0$，所以 $\varphi(x) \equiv 0$，因此积分方程只有平凡解 $\varphi(x) \equiv 0$

由 (1)，(2)，当 $\lambda \geqslant 1$ 时，积分方程没有特征值与特征函数。

(3) 当 $\lambda - 1 < 0$，即 $\lambda < 1$ 时，微分方程的通解

$$\varphi(x) = c_1\cos(\sqrt{1 - \lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{1 - \lambda}x)$$

于是

$$\varphi'(x) = \sqrt{1 - \lambda}\left[-c_1\sin(\sqrt{1 - \lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{1 - \lambda}x)\right]$$

由边界条件可得

$$\begin{cases} c_1\cos(\sqrt{1 - \lambda}\pi) + c_2\sin(\sqrt{1 - \lambda}\pi) = 0 & (3.1-20) \\ c_2\sqrt{1 - \lambda} = 0 & (3.1-21) \end{cases}$$

因为 $\sqrt{1 - \lambda} \neq 0$，由式(3.1-21)可得 $c_2 = 0$，再由式(3.1-20)就有 $c_1\cos(\sqrt{1 - \lambda}\pi) = 0$。

如果 $c_1 = 0$，由于 $c_2 = 0$，于是 $\varphi(x) = 0$；如果 $c_1 \neq 0$，则 $\cos(\sqrt{1 - \lambda}\pi) = 0$，于是 $\sqrt{1 - \lambda}\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$，因而 $\lambda = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$，所以方程组(3.1-20)及(3.1-21)的解为 $c_1 = c$，$c_2 = 0$（c 为任意常数），因此积分方程有无限个解 $\varphi(x) = c\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$。

这样，所求的特征值为 $1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$；特征函数为 $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$。

§3.2 核关于特征函数的展开式

1. 核的特征函数展开式

由式(3.1-18)可知，$k(x,t)$作为t的函数，它关于特征函数系$\{\varphi_k(t)\}$的Fourier级数具有下列形式

$$\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{3.2-1}$$

式中求和关于k进行，当特征值个数为无限时，k从1到∞；当特征值个数m为有限时，则k从1取到m。

级数(3.2-1)又可看为核$k(x,t)$作为x,t的函数，在$a\leqslant x,t\leqslant b$关于$\{\varphi_k(x)\varphi_l(t)\}(k,l=1,2\cdots)$时的Fourier级数。容易验证。$\{\varphi_k(x)\varphi_l(t)\}$在$a\leqslant x$，$t\leqslant b$内是标准正交系，此时成立

$$\int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi_k(x)\varphi_l(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_l}\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}0 & (k\neq l)\\ \dfrac{1}{\lambda_l} & (k=l)\end{cases}$$

定理3.2.1 若对称核$k(x,t)$连续，如果级数式(3.2-1)在$a\leqslant x$，$t\leqslant b$内一致收敛，则在$a\leqslant x$，$t\leqslant b$内级数式(3.2-1)的和为$k(x,t)$，即

$$k(x,t)=\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{3.2-2}$$

证明 考虑

$$\omega(x,t)=k(x,t)-\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{3.2-3}$$

它是在$a\leqslant x,t\leqslant b$上的连续且对称的函数。若固定$x$，则可把$\omega(x,t)$看为在$[a,b]$上$t$的函数。由于$k(x,t)$关于$\{\varphi_k(t)\}$的Fourier系数为$\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$；而$\sum\limits_k \dfrac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$关于$\{\varphi_k(t)\}$的Fourier系数亦为$\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$，因此$\omega(x,t)$关于$\{\varphi_k(t)\}$的Fourier系数为0，即

$$\int_a^b \omega(x,t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{3.2-4}$$

只要证明$\omega(x,t)$在$a\leqslant x$，$t\leqslant b$内恒等于零，就可以得到定理的结论。为此，用反证法。设$\omega(x,t)$在$a\leqslant x,t\leqslant b$不恒等于零，取$\omega(x,t)$为积分方程$\psi(x)=\lambda\int_a^b\omega(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t$的对称核。由定理3.1.1知，此积分方程至少有一个特征值λ_0。设λ_0所对应的、不恒等于零的特征函数为$\psi_0(x)$

$$\psi_0(x)=\lambda_0\int_a^b\omega(x,t)\psi_0(t)\mathrm{d}t \tag{3.2-5}$$

以下证明$\psi_0(x)$与$k(x,t)$的所有特征函数$\varphi_k(x)$正交。

把式(3.2-4)两端乘以$\lambda_0\psi_0(x)$，再关于x从a到b积分，得到

$$\lambda_0\int_a^b\int_a^b \omega(x,t)\psi_0(x)\varphi_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

由 $\omega(x,t)$的对称性及 $\lambda_0\neq 0$，有

$$\int_a^b\left[\int_a^b \omega(t,x)\psi_0(x)\mathrm{d}x\right]\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0$$

再由式(3.2-5)

$$\int_a^b \psi_0(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t = 0 \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{3.2-6}$$

由式(3.2-3)及(3.2-5)

$$\psi_0(x) = \lambda_0\int_a^b\left[k(x,t) - \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]\psi_0(t)\mathrm{d}t$$

由假设，级数(3.2-1)在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 一致收敛，考虑到式(3.2-6)，就有

$$\psi_0(x) = \lambda_0\int_a^b k(x,t)\psi_0(t)\mathrm{d}t$$

即 $\psi_0(x)$是原来核 $k(x,t)$的特征函数，因此它是特征值 λ_0 对应的特征函数 $\varphi_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 的线性组合。但在另一方面，$\psi_0(x)$及所有的 $\psi_k(x)$构成一个正交系，它们是线性无关的。于是引出了矛盾，这说明 $\omega(x,t)$不恒等于零是不可能的，因此在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 内，$\omega(x,t)\equiv 0$，即式(3.2-2)成立。

在定理 3.2.1 中，级数(3.2-1)的一致收敛性是作为条件给出的，但在一般情况下，级数(3.2-1)不一定收敛。但如果附加一些条件，就可以断定它具有收敛性。

定理 3.2.2(Mercer 定理) 如果对称核 $k(x,t)$连续，且只有正的特征值(或者最多只有有限个负特征值)，则级数(3.2-1)绝对一致收敛于 $k(x,t)$：$k(x,t)=\sum\limits_k \dfrac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$，其中 $\varphi_k(x)$是 $k(x,t)$的(标准正交的)特征函数系。

Mercer 定理在 $k(x,t)$只有负的特征值(至多有有限个正特征值)时也成立。

在一般情况，即特征值可正可负的情况下，$\sum\limits_k \dfrac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$ 平均收敛于对称核 $k(x,t)$*。

Mercer 定理非常有用，由物理意义可直接得到，许多力学与物理问题所归结出的对称核第二类 Fredholm 方程，其特征值都是正的。

利用积分方程的对称核关于特征函数的展开式，可以得到一些表达式。

例 3.2.1 求证 $\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\pi x\sin k\pi t}{k^2} = \begin{cases} x(1-t) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ t(1-x) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

证明 设

$$k(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ t(1-x) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

以 $k(x,t)$作为积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

的核，显然 $k(x,t)$是对称核。于是

---

* 注 设函数 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$在$[a,b]$平方可积，如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b|f_k(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x = 0$，则称函数序列$\{f_k(x)\}$平均收敛(更确切地说是平方平均收敛)于函数 $f(x)$。

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x t(1-x)\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_x^1 x(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi'(x)=-\lambda\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda x(1-x)\varphi(x)+\lambda\int_x^1(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda x(1-x)\varphi(x)$$

$$=-\lambda\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_x^1(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x)=-\lambda x\varphi(x)-\lambda(1-x)\varphi(x)=-\lambda\varphi(x)$$

这样，积分方程等价于

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi(1)=0$$

上述常微分方程边值问题的特征值为 $\lambda=k^2\pi^2$，对应的特征函数为 $\sqrt{2}\sin k\pi x$，由 Mercer 定理

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin k\pi x\cdot\sqrt{2}\sin k\pi t}{k^2\pi^2}$$

因此

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x\sin k\pi t}{k^2}=\begin{cases}x(1-t) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ t(1-x) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

2. 对称核为退化核的充分必要条件

由定理 3.2.1 立刻可得到

定理 3.2.3 若 $k(x,t)$ 为连续对称核，则它是退化核的充分必要条件是 $k(x,t)$ 的特征值个数(m)为有限。

证明 由 §2.2 可知，退化(对称)核方程的 Fredholm 行列式 $D(\lambda)=0$ 的根只有有限个，因此它的特征值个数为有限，必要性显然成立。以下证明充分性。

如果核 $k(x,t)$ 只有有限个特征值，则(3.2－1)式是有限项的和，由定理 3.2.2 知

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

式中 $\varphi_k(x)$ 为正交标准的特征函数系，因此核 $k(x,t)$ 是一个退化核。

§3.3 迭核关于特征函数的展开式

1. 迭核的特征值与特征函数

定理 3.3.1 如果积分方程的核 $k(x,t)$ 的特征值为 λ_p，对应的特征函数为 $\varphi_p(x)$，则 λ_p^n 是迭核 $k_n(x,t)$ 的特征值，$\varphi_p(x)$ 是 $k_n(x,t)$ 的、特征值 λ_p^n 对应的特征函数。

证明 记 $A\varphi\equiv\int_a^b k(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}t$，由迭核定义

$$A(A\varphi)\equiv A^2\varphi=\int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

一般地

$$A(A^{n-1}\varphi)\equiv A^n\varphi=\int_a^b k_n(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

对于 $k(x,t)$ 的特征值 λ_p 与特征函数 $\varphi_p(x)$ 成立

$$\varphi_p(x) = \lambda_p A\varphi_p = \lambda_p A(\lambda_p A\varphi_p) = \lambda_p^2 A^2\varphi_p$$

依次可得

$$\varphi_p = \lambda_p^3 A^3\varphi_p = \cdots = \lambda_p^n A^n\varphi_p = \lambda_p^n\int_a^b k_n(x,t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t$$

因此 λ_p^n 是 $k_n(x,t)$的特征值，对应的特征函数为 $\varphi_p(x)$。

为了证明定理 3.3.2，先给出一个引理。

引理 如果 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 是方程 $h^n=\mu$ 的根，则成立 $h_1^s+h_2^s+\cdots+h_n^s=0$。$s=1, 2, \cdots, n-1$

证明 众所周知，$h_m=\sqrt[n]{\mu}\xi^m$，式中 $\sqrt[n]{\mu}$ 为方程 $h^n=\mu$ 的任一根，$\xi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ $(\mathrm{i}^2=-1)$，于是

$$h_1^s + h_2^s + \cdots + h_n^s = \sqrt[n]{\mu^s}(\xi^s + \xi^{2s} + \cdots + \xi^{ns}) = \sqrt[n]{\mu^s}(1 + \xi^s + \xi^{2s} + \cdots + \xi^{(n-1)s})\xi^s$$

$$= \xi^s\sqrt[n]{\mu^s}\,\frac{\xi^{ns}-1}{\xi^s-1}$$

因为 $\xi^{ns}=1$，因此 $h_1^s+h_2^s+\cdots+h_n^s=0$。

定理 3.3.2 如果 n 次迭核 $k_n(x,t)$的特征值为 μ，则核 $k(x,t)$至少以 μ 的一个 n 次实根为它的特征值。

证明 设 $k_n(x,t)$的对应于特征值 μ 的特征函数为 $\psi(x)$。由下列公式定义函数 φ_p。

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{n}(\psi + h_pA\psi + h_p^2A^2\psi + \cdots + h_p^{n-1}A^{n-1}\psi) \tag{3.3-1}$$

上式关于 p 从 1 到 n 求和，注意到引理，就有

$$\psi(x) = \sum_{p=1}^{n}\varphi_p(x)$$

于是，在函数 $\varphi_p(x)(p=1,2,\cdots,n)$中，至少有一个不恒等于零。

以下再证 $\varphi_p(x)=h_pA\varphi_p$。为此，在式(3.3-1)两端作用算子 A，并乘以 h_p，得到

$$h_pA\varphi_p = \frac{1}{n}(h_pA\psi + h_p^2A^2\psi + \cdots + h_p^{n-1}A^{n-1}\psi) + \frac{1}{n}h_p^nA^n\psi$$

由式(3.3-1)及 $h_p^n=\mu$，$\mu A^n\psi=\psi$ 可得

$$h_pA\varphi_p = \varphi_p - \frac{1}{n}\psi(x) + \frac{1}{n}h_p^nA^n\psi = \varphi_p(x)$$

这样，不恒等于零的函数 $\varphi_p(x)$是核 $k(x,t)$的特征函数，h_p 是对应的特征值。由定理 3.1.1 知，$k(x,t)$仅具有实的特征值。因而复根 h_p 所对应的函数 φ_p 恒等于零。

如果 n 为奇数，则 $h_p^n=\mu$ 只有一个实根 $h_p=\sqrt[n]{\mu}$，它必定是核 $k(x,t)$的特征值，且$\varphi_p(x)$是它的特征函数。而 $\mu A^n\psi=\psi$，即 $h_p^nA^n\psi=\psi$，利用式(3.3-1)可知，特征函数 $\varphi_p(x)=\psi(x)$。

如果 n 为偶数，$\sqrt[n]{\mu}$ 有两个实根 h_1、h_2，设此两个根对应的(核 $k(x,t)$的)特征函数分别为 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$，则

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

这样，对奇数 n，对应于核 $k_n(x,t)$的每个特征值 μ，有 $k(x,t)$的一个特征值 $\sqrt[n]{\mu}$；对偶数 n，由式(3.3-2)，核 $k_n(x,t)$的每个特征函数 $\psi(x)$，要么与 $k(x,t)$的特征函数相同（式(3.3-2)中的 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$中可能有一个恒等于零)，要么是 $k(x,t)$特征函数的线性组合。

由定理 3.3.1 及 3.3.2 可知，如果$\{\lambda_p\}$，$\{\varphi_p(x)\}$是核 $k(x,t)$特征值及特征函数的集合。则$\{\lambda_p^n\}$与$\{\varphi_n(x)\}$是迭核 $k_n(x,t)$特征值及特征函数的全体。

2. 迭核的特征函数展开式

核 $k(x,t)$的任何次迭核也可以关于 $k(x,t)$的特征函数系展开。

定理 3.3.3 对于任何整数 $n\geqslant 3$，连续对称核 $k(x,t)$的 n 次迭核 $k_n(x,t)$，都可以展开为 $k(x,t)$的特征函数系的 Fourier 级数

$$k_n(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_p(x)\varphi_p(t)}{\lambda_p^n} \tag{3.3-2}$$

式(3.3-2)右端的级数，在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 内关于 x，t 绝对且一致收敛。

证明 首先证明上述级数的绝对一致收敛性。为此，估计级数的余项，并利用$|\alpha\cdot\beta|\leqslant\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$，有

$$\sum_{p=m}^{m+q} \frac{1}{|\lambda_p^n|}|\varphi_p(x)\varphi_p(t)| \leqslant \frac{1}{2|\lambda_n^{n-2}|}\sum_{p=m}^{m+q}\left[\frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2}+\frac{\varphi_p^2(t)}{\lambda_p^2}\right]$$

由于当 $p\to\infty$时$|\lambda_p|$单调趋于无穷，由 Bessel 不等式

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^n}\leqslant\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t\leqslant C^2$$

式中 C^2 为正常数。

由于当 $q>0$ 时

$$\sum_{p=m}^{m+q}\left|\frac{\varphi_p(x)\varphi_p(t)}{\lambda_p^n}\right|\leqslant\frac{C_2}{|\lambda_m^{n-2}|} \tag{3.3-3}$$

因为当 $m\to\infty$时，$|\lambda_m|\to\infty$，由式(3.3-3)及 Cauchy 判别法，可知式(3.3-2)关于 x、t 绝对且一致收敛。

再证式(3.3-2)成立。考虑

$$\Phi(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^n}\varphi_p(x)\varphi_p(t)$$

函数$\Phi(x,t)$在域 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 内连续，只要证明 $k_n(x,t)=\Phi(x,t)$，就可以得到定理的结论。为此用反证法。设 $k_n(x,t)\equiv\Phi(x,t)$不成立，也就是 $Q(x,t)\equiv k_n(x,t)-\Phi(x,t)\neq 0$，由于 $Q(x,t)$是对称的，由定理 3.1.1 知，$Q(x,t)$有特征值 μ，设对应的特征函数为 $\psi(x)$，就有

$$\psi(x) = \mu\int_a^b Q(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-4}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b\psi(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x &= \mu\int_a^b\int_a^b Q(x,t)\psi(t)\varphi_r(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= \mu\int_a^b\psi(t)\left\{\int_a^b\left[k_n(x,t)-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^n}\varphi_p(x)\varphi_p(t)\right]\varphi_r(x)x\right\}\mathrm{d}t\\ &= \mu\int_a^b\psi(t)\left\{\int_a^b k_n(x,t)\varphi_r(x)\mathrm{d}x-\frac{\varphi_r(t)}{\lambda_r^n}\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

但由于 $\varphi_r(x)$是 $k_n(x,t)$对应于特征值 λ_r^n 的特征函数，而 $k_n(t,x)=k_n(x,t)$，因此

$$\varphi_r(x) = \lambda_r^n\int_a^b k_n(x,t)\varphi_r(x)\mathrm{d}x$$

于是
$$\int_a^b \psi(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.3-5}$$
这表明 $\psi(x)$与核 $k(x,t)$的所有特征函数 $\varphi_r(x)(r=1,2,\cdots)$正交。

由式(3.3-4)、$Q(x,t)$的定义及式(3.3-5)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mu\int_a^b Q(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t \\ &= \mu\int_a^b\left[k_n(x,t) - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(x)\varphi_p(t)}{\lambda_p}\right]\psi(t)\mathrm{d}t \\ &= \mu\int_a^b k_n(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样 $\psi(x)$就是 $k_n(x,t)$的特征函数。

而 $k_n(x,t)$的特征函数也是 $\varphi_p(x)$，因此 $\psi(x)$必定是 $\varphi_p(x)$的线性组合。但前面已证得 $\psi(x)$与所有的 $\varphi_p(x)$正交。这就引起矛盾，因此 $Q(x,t)\neq 0$ 是不可能的，定理得证。*

§3.4 Hilbert-Schmidt 定理

Hilbert-Schmidt 定理是线性积分方程理论的一个基本定理。这个展开定理在许多方面有广泛的应用，在§3.5 中将利用它给出非齐次对称核方程的解的表达式。在证明这个定理前，先给出一个引理。

引理 3.4.1 设 $\varphi_p(x)(p=1,2,\cdots)$是核 $k(x,t)$的特征函数，则使连续函数 $Q(x)$与核 $k(x,t)$正交，即
$$\int_a^b k(x,t)Q(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{3.4-1}$$
成立的充分必要条件是 $Q(x)$与核 $k(x,t)$的每个特征函数正交，即
$$\int_a^b Q(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (p = 1,2,\cdots) \tag{3.4-2}$$

证明 必要性 设 $\varphi_p(x)(p=1,2\cdots)$是 $k(x,t)$的特征函数，当式(3.4-1)成立时，就有
$$\begin{aligned}\int_a^b Q(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x &= \lambda_p\int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi_p(t)Q(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \lambda_p\int_a^b\varphi_p(t)\left\{\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

充分性 考虑
$$J_1 = \int_a^b\int_a^b k_4(x,t)Q(x)Q(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{3.4-3}$$
由迭核 $k_4(x,t)$的展开式(3.3-2)，就有
$$\begin{aligned}J_1 &= \int_a^b\int_a^b\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(x)\varphi_p(t)}{\lambda_p^4}Q(x)Q(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p^4}\int_a^b\varphi_p(x)Q(x)\mathrm{d}x\int_a^b\varphi_p(t)Q(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

---

* 注：当 $n=2$ 时，如果任意固定一个变量，则级数(3.3-2)关于另一个变量绝对且一致收敛。

当式(3.4－2)成立时，$J_1=0$。但

$$k_4(x,t)=\int_a^b k_2(x,u)k_2(u,t)\mathrm{d}u$$

再代入式(3.4－3)，得到

$$\begin{aligned}0=J_1&=\int_a^b\int_a^b\left\{\int_a^b k_2(x,u)k_2(u,t)\mathrm{d}u\right\}Q(x)Q(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left\{\left[\int_a^b k_2(x,u)Q(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b k_2(u,t)Q(t)\mathrm{d}t\right]\right\}\mathrm{d}u\\&=\int_a^b\left\{\int_a^b k_2(x,u)Q(x)\mathrm{d}x\right\}^2\mathrm{d}u\end{aligned}$$

因而

$$\int_a^b k_2(x,u)Q(x)\mathrm{d}x=0 \tag{3.4-4}$$

在式(3.4－4)的两端乘以 $Q(u)$，并关于 u 从 a 到 b 积分，得到

$$\int_a^b\int_a^b k_2(x,u)Q(x)Q(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u \tag{3.4-5}$$

由 $k(x,t)$ 的对称性

$$k_2(x,u)=\int_a^b k(x,t)k(t,u)\mathrm{d}t=\int_a^b k(x,t)k(u,t)\mathrm{d}t$$

把上式代入式(3.4－5)，就有

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(u,t)Q(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x\right]^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x=0$$

定理 3.4.1　(Hilbert-Schmidt 展开定理)　如果函数 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t \tag{3.4-6}$$

式中 $h(t)$ 在 $[a,b]$ 分段连续，则 $f(x)$ 可以表示为连续核(更一般的为弱奇性核) $k(x,t)$ 的特征函数 $\varphi_p(x)$ 的 Fourier 级数，即

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}f_p\varphi_p(x) \tag{3.4-7}$$

式中 $f_p=\int_a^b f(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x$，式(3.4－7)右端的级数，在 $[a,b]$ 上关于 x 绝对且一致收敛。

下面给出级数(3.4－7)的另一形式。函数 $f(x)$ 的 Fouriet 系数 f_p 等于 $\frac{h_p}{\lambda_p}$，式中 h_p 是 $h(t)$ 的 Fourier 系数：$h_p=\int_a^b h(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x$。这是因为

$$\begin{aligned}f_p&=\int_a^b f(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi_p(x)\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_a^b h(t)\int_a^b k(x,t)\varphi_p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_a^b h(t)\frac{\varphi_p(t)}{\lambda_p}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\lambda_p}\int_a^b h(t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t=\frac{h_p}{\lambda_p}\end{aligned}$$

因此级数(3.4－7)亦可记为

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x) \tag{3.4-8}$$

证明 首先证明级数(3.4－8)绝对且一致收敛。利用 Cauchy-Bunyakowski 不等式得到

$$\sum_{p=n}^{n+q}\left|\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)\right|\leqslant\sqrt{\sum_{p=n}^{n+q}h_p^2}\cdot\sqrt{\sum_{p=n}^{n+q}\frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2}}$$

再由 Bessel 不等式可得

$$\sum_{p=1}^{\infty}h_p^2\leqslant\int_a^b h^2(t)\mathrm{d}t \text{ 及} \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p^2(x)}{\lambda_p^2}\leqslant\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t\leqslant C^2$$

式中 C^2 为任意正常数。

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于当 n 充分大时，可使 $\sum_{p=n}^{n+q}h_p^2<\frac{\varepsilon^2}{C^2}$，所以级数 $\sum_{p=1}^{\infty}h_p^2$ 收敛。于是对充分大的 n，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，就有

$$\sum_{p=n}^{n+q}\left|\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)\right|<\varepsilon$$

因此级数(3.4－8)绝对一致收敛。

考虑
$$Q(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)-f(x)$$

$Q(x)$在$[a,b]$连续，由于$\{\varphi_p(x)\}$为标准正交系，故

$$\int_a^b Q(x)\varphi_r(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)-f(x)\right\}\varphi_r(x)\mathrm{d}x=\frac{h_r}{\lambda_r}-f_r=0$$

于是 $Q(x)$与所有的函数 $\varphi_p(x)$正交。再由引理，它与核 $k(x,t)$正交，即

$$\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x=0 \tag{3.4-9}$$

由 $Q(x)$与 $\varphi_p(x)$的正交性，就有

$$\int_a^b Q^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b Q(x)\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)-f(x)\right\}\mathrm{d}x$$
$$=-\int_a^b Q(x)f(x)\mathrm{d}x$$

由式(3.4－6)

$$\int_a^b Q^2(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b Q(x)\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$
$$=-\int_a^b h(t)\int_a^b k(x,t)Q(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

再利用式(3.4－9)，得到

$$\int_a^b Q^2(x)\mathrm{d}x=0$$

因而 $Q(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_p}{\lambda_p}\varphi_p(x)-f(x)=0$，定理证毕。

§3.5 非齐次对称核方程的解

利用 Hilbert-Schmidt 定理，立刻可得到第二类对称核 Fredholm 方程解的表达式。

定理 3.5.1 若 λ 不是具有连续对称核的第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \tag{3.5-1}$$

的特征值，则它有惟一解，且可表示为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\varphi_p(x) \tag{3.5-2}$$

式中 $f_p = \int_a^b f(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x$ ，$\varphi_p(x)$是式(3.5－1)的齐次方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.5-1°}$$

的特征值 λ_p 对应的特征函数。

证明 由§2.4Fredholm 第一定理，当 λ 不是(3.5－1°)的特征值时，非齐次方程(3.5－1)存在惟一解。设它具有下列形式的解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x) \tag{3.5-3}$$

式中 $g(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 。

由 Hilbert-Schmidt 展开定理(定理 3.4.1)，函数 $g(x)$可以表示为核 $k(x,t)$特征函数的级数

$$g(x) = \sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi_p(x) \tag{3.5-4}$$

把式(3.5－4)代入(3.5－3)，再代入式(3.5－1)，得到

$$\begin{aligned} &f(x) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi_p(x) \\ &= f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\left[f(t) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi_p(t)\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

即

$$\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi_p(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}c_p\int_a^b k(x,t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t \tag{3.5-5}$$

再对式(3.5－5)中的函数 $\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 用 Hilbert-Schmidt 展开定理，而由特征值的定义，把 $\int_a^b k(x,t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t$ 用 $\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p}$ 代替，得到

$$\sum_{p=1}^{\infty}c_p\varphi_p(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{\lambda_p}\varphi_p(x) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty}c_p\frac{\varphi_p(x)}{\lambda_p}$$

比较上式两端 $\varphi_p(x)$的系数，可得

$$c_p = \frac{f_p}{\lambda_p} + \frac{\lambda}{\lambda_p}c_p,\text{即 } c_p = \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}$$

由式(3.5－4)、(3.5－3)就可得到，方程(3.5－1)的解可以表示为下列绝对一致收敛的级数

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\varphi_p(x) \tag{3.5-2}$$

定理 3.5.2 若 λ 与积分方程(3.5-1)的某一特征值 λ_r 相等，λ_r 对应的特征函数为 $\varphi_{r+1}(x)$，$\varphi_{r+2}(x)$，…，$\varphi_{r+q}(x)$，则方程(3.5-1)的解存在的充分必要条件是成立

$$\int_a^b f(x)\varphi_{r+s}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,q) \tag{3.5-6}$$

在条件(3.5-6)满足时，非齐次方程(3.5-1)的解为

$$\varphi(x) = c_1\varphi_{r+1}(x) + c_2\varphi_{r+2}(x) + \cdots + c_q\varphi_{r+q}(x) + \lambda_r\sum_p{}' \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda_r}\varphi_p(x) + f(x) \tag{3.5-7}$$

式中 c_1，c_2，…，c_q 为任意常数；f_p，λ_p，$\varphi_p(x)$的意义同定理 3.5.1；$\sum\limits_p{}'$ 表示对所有的 p (除了 $p=r+1,r+2,\cdots,r+q$)求和。

式(3.5-2)及式(3.5-7)，称为 Hilbert-Schmidt 公式。

证明 因为式(3.5-1)是对称核方程，它的共轭齐次方程就是齐次方程(3.5-2)。由 Fredholm 第三定理，式(3.5-1)的可解性条件就是式(3.5-6)

$$\int_a^b f(x)\varphi_{r+s}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,q)$$

当式(3.5-6)满足式，非齐次方程(3.5-1)的解是齐次方程(3.5-1°)的通解 $c_1\varphi_{r+1}(x)+c_2\varphi_{r+2}(x)+\cdots+c_q\varphi_{r+q}(x)$加上方程(3.5-1)的一个特解 $\lambda_r\sum\limits_p{}' \frac{f_p}{\lambda_p - \lambda}\cdot\varphi_p(x) + f(x)$，于是得出，方程(3.5-1)的解由(3.5-7)式表出。

当对称核 $k(x,t)$又是退化核时，定理 3.5.1 及定理 3.5.2 中的级数就化为有限项的和。

例 3.5.1 解积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}t = x \tag{3.5-8}$$

式中
$$k(x,t) = \begin{cases} x(t-1) & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ t(x-1) & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

解 $k(x,t)$为对称核。先求方程(3.5-8)的齐次方程的特征值、特征函数。由于

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_0^x t(x-1)\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_x^1 x(t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda(x-1)\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda x\int_x^1 (t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \lambda(x-1)x\varphi(x) + \lambda\int_0^x t\varphi(x)\mathrm{d}t - \lambda x(x-1)\varphi(x) + \\ &\quad \lambda\int_x^1 (t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_x^1 (t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x) + \lambda(1-x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$

因此求齐次积分方程的特征值化为下列微分方程的特征值问题

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \tag{3.5-9}$$

式(3.5－9)的特征值为 $\lambda_p=-p^2\pi^2$，对应的特征函数为 $\varphi_p(x)=\sqrt{2}\sin p\pi x$，$p=1,2,\cdots$。

当 $\lambda\neq\lambda_p$，则非齐次方程(3.5－8)的惟一解为

$$\varphi(x)=x+\lambda\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{-p^2\pi^2-\lambda}\sqrt{2}\sin p\pi x$$

式中 $f_p=\int_0^1 x\sqrt{2}\sin p\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{p+1}}{p\pi}\sqrt{2}$

因此
$$\varphi(x)=x-\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p(\lambda+p^2\pi^2)}\sin p\pi x$$

当 $\lambda=\lambda_p=-p^2\pi^2$ 时，由于 $f_p=\frac{(-1)^{p+1}}{p\pi}\sqrt{2}\neq 0$，正交性条件不满足，此时方程(3.5－8)无解。

例 3.5.2 解积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\cos\pi x \tag{3.5-10}$$

式中
$$k(x,t)=\begin{cases}t(x+1) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ x(t+1) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

解 式(3.5－10)是对称核方程,它的齐次方程的特征值问题等价于下列微分方程的特征值问题

$$\varphi''(x)-\lambda\varphi(x)=0,\quad \varphi(0)=\varphi'(0),\quad \varphi(1)=\varphi'(1)$$

它的特征值为 $\lambda_0=1$，$\lambda_p=-p^2\pi^2$ $p=1,2,\cdots$；对应的特征函数为

$$\varphi_0(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\mathrm{e}^x,$$

$$\varphi_p(x)=\sqrt{\frac{2}{p^2\pi^2+1}}(\sin p\pi x+p\pi\cos p\pi x)\quad(p=1,2,\cdots)$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -p^2\pi^2$ 时，方程(3.5－10)有惟一解

$$\varphi(x)=\cos\pi x-$$
$$\lambda\left[\frac{f_0\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\mathrm{e}^x}{\lambda-1}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p}{\lambda+p^2\pi^2}\sqrt{\frac{2}{p^2\pi^2+1}}(\sin p\pi x+p\pi\cos p\pi x)\right]$$

由于
$$f_0=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}\mathrm{e}^x\cos\pi x\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}{(1+\pi^2)(\mathrm{e}-1)}$$

$$f_p=\sqrt{\frac{2}{p^2\pi^2+1}}\int_0^1\cos\pi x(\sin p\pi x+p\pi\cos p\pi x)\mathrm{d}x$$

利用三角函数的正交性，得到

$$f_p=\begin{cases}0 & (p=2,3,\cdots)\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi^2+1}}\pi & (p=1)\end{cases}$$

所以 $\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\frac{2}{(\lambda-1)(\lambda+\pi^2)(\mathrm{e}-1)}\mathrm{e}^x-$

$$\frac{\pi}{\pi^2+1}\frac{\lambda}{\lambda+\pi^2}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$$

当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\pi^2$，由于自由项 $\cos\pi x$ 与特征函数 $\varphi_0(x)=e^x$ 或 $\varphi_1(x)=\sin\pi x+\pi\cos\pi x$ 不正交，所以方程(3.5-10)无解。

当 $\lambda=\lambda_r=-r^2\pi^2(r=2,3,\cdots)$，可解性条件满足，方程(3.5-1)的解为

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda_r\left[f_0\frac{1}{1-\lambda_r}\varphi_0(x)+\frac{f_1}{-\pi^2-\lambda_r}\varphi_1(x)+0\right]+$$

$$C(\sin r\pi x+r\pi\cos r\pi x)$$

$$=\cos\pi x+\frac{1}{\pi^2+1}\left[\frac{2r^2\pi^2e^x}{(r^2+\pi^2)(e-1)}-\frac{r^2}{r^2-1}(\sin\pi x+r\pi\cos\pi x)\right]+$$

$$C(\sin r\pi x+r\pi\cos r\pi x)$$

式中 C 为任意常数。

顺便指出，与对称核齐次积分方程可以化为常微分方程的齐次边值问题(见§3.1)相类似，当积分方程的(对称)核是某个线性微分方程的 Green 函数时，非齐次对称核积分方程可以直接化为此微分方程的非齐次边值问题。

例 3.5.3 解积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt=e^x \qquad (3.5-11)$$

式中

$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}(t-1)}{\mathrm{sh}\,1} & (0\leqslant x\leqslant t)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}\,1} & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

解 方程(3.5-11)可记为

$$\varphi(x)=e^x+\frac{\lambda\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^x\mathrm{sh}\,t\,\varphi(t)dt+\frac{\lambda\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,1}\int_x^1\mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt$$

依次求出

$$\varphi'(x)=e^x+\frac{\lambda\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^x\mathrm{sh}\,t\,\varphi(t)dt+\frac{\lambda\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,1}\int_x^1\mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt$$

$$\varphi''(x)=e^x+\frac{\lambda\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^x\mathrm{sh}\,t\,\varphi(t)dt+\frac{\lambda\mathrm{ch}(x-1)}{\mathrm{sh}\,1}\mathrm{sh}\,x\varphi(x)+$$

$$\lambda\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,1}\int_x^1\mathrm{sh}(t-1)\varphi(t)dt-\frac{\lambda\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,1}\mathrm{sh}(x-1)\varphi(x)$$

$$=\varphi(x)+\frac{\lambda\varphi(x)}{\mathrm{sh}\,1}[\mathrm{ch}(x-1)\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}(x-1)]$$

$$=\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=(\lambda+1)\varphi(x)$$

于是积分方程等价于常微分方程的非齐次边值问题

$$\begin{cases}\varphi''(x)=(\lambda+1)\varphi(x) & (3.5-12)\\ \varphi(0)=1,\varphi(1)=e & (3.5-13)\end{cases}$$

(1) 当 $\lambda+1=0$，即 $\lambda=-1$ 时，$\varphi(x)=c_1x+c_2$，由式(3.5-13)

$$\varphi(x)=(e-1)x+1$$

(2) 当 $\lambda+1>0$，即 $\lambda>-1$ 时，$\varphi(x)=c_1\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda+1}x+c_2\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda+1}x$，再由式

(3.5－13)，可得

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{sh}[\sqrt{\lambda+1}(1-x)]+e\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda+1}x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda+1}}$$

(3) 当 $\lambda+1<0$，即 $\lambda<-1$ 时，记 $\lambda+1=-\mu^2$

$$\varphi(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$$

由式(3.5－13)

$$c_1=1,\quad c_1\cos\mu+c_2\sin\mu=e \tag{3.5-14}$$

①若 μ 不是方程 $\sin\mu=0$ 的根，就有 $c_1=1$，$c_2=\frac{e-\cos\mu}{\sin\mu}$，因此

$$\varphi(x)=\cos\mu x+\frac{e-\cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu x$$

式中　$\mu=\sqrt{-\lambda-1}$；

②若 μ 是方程 $\sin\mu=0$ 的根，即 $\mu=m\pi(m=1,2,\cdots)$，此时方程组(3.5－14)不相容，积分方程(3.5－11)无解。

20 世纪初，首先是 Hilbert，后来是 Schmidt 建立了连续对称核第二类 Fredholm 积分方程的理论，因此通常把对称核方程的理论称为 Hilbert-schmidt 理论。以后 Carleman 又把这种理论推广到核满足平方可积的情况。[7]。

在利用 Hilbert-Schmidt 方法确定积分方程的解时，需要确定积分方程的特征值与特征函数，它们通常可以用近似方法求出(见第七章)。

§3.6　可化为对称核的方程

形如

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{3.6-1}$$

的方程，式中 $k(x,t)=k(t,x)$，在 $[a,b]$ 上 $p(x)\geqslant 0$，称为可对称化的积分方程

在方程(3.6－1)的两端同乘以 $\sqrt{p(x)}$，再作未知函数的代换 $\psi(x)=\sqrt{p(x)}\cdot\varphi(x)$，就可以把方程(3.6－1)化为

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\sqrt{p(x)p(t)}\psi(t)\mathrm{d}t+f(x)\sqrt{p(x)} \tag{3.6-2}$$

方程(3.6－2)的核

$$l(x,t)=k(x,t)\sqrt{p(x)p(t)} \tag{3.6-3}$$

为对称核。设 λ_k 与 $\psi_k(x)$ 是式(3.6－2)的齐次方程

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\sqrt{p(x)p(t)}\psi(t)\mathrm{d}t \tag{3.6-4}$$

的特征值与特征函数。通常设 $\{\psi_k(x)\}$ 为**标准正交系**，即

$$\int_a^b\psi_m(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (\text{当 } m\neq n \text{ 时})\\ 1 & (\text{当 } m=n \text{ 时})\end{cases}$$

由于

$$\psi_m(x)=\varphi_m(x)\sqrt{p(x)} \tag{3.6-5}$$

因此齐次方程 $\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的特征函数具有以 $p(x)$ 为权的标准正交性

$$\int_a^b p(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (\text{当 } m\neq n \text{ 时})\\ 1 & (\text{当 } m=n \text{ 时})\end{cases}$$

设函数 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)p(t)h(t)\mathrm{d}t \tag{3.6-6}$$

即

$$\sqrt{p(x)}f(x)=\int_a^b l(x,t)\sqrt{p(t)}h(t)\mathrm{d}t$$

则由 Hilbert-Schmidt 定理

$$\sqrt{p(x)}f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}f_p\psi_p(x) \tag{3.6-7}$$

式中

$$f_p=\int_a^b\sqrt{p(x)}f(x)\psi_p(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)p(x)\varphi_p(x)\mathrm{d}x$$

再由式(3.6-7)、(3.6-5)，可得

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}f_p\psi_p(x) \tag{3.6-8}$$

§3.7 用 Green 函数解微分方程的边值问题

考虑微分方程的边值问题

$$\begin{cases}L[y]=-f(x) & (3.7-1)\\ \alpha_1y'(a)-\beta_1y(a)=0,\alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0 & (3.7-2)\end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned}L[y]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)]-q(x)y(x)\\&=k(x)y''(x)+k'(x)y'(x)-q(x)y(x)\end{aligned}$$

$k(x)$、$q(x)$ 都是二阶连续可微的函数，$k(x)\geqslant k_0>0$，$q(x)\geqslant 0$，α_1，α_2，β_1，$\beta_2\geqslant 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$，$\alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0$，$k_0$ 为正常数。

边值问题(3.7-1)、(3.7-2)的解可利用

$$\begin{cases}L[y]=0\\ \alpha_1y'(a)-\beta_1y(a)=0,\alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0\end{cases} \tag{3.7-3}$$

的 Green 函数表示出来。

边值问题

$$\begin{cases}L[y]=-\delta(x-t)\\ \alpha_1y'(a)-\beta_1y(a)=0, \quad \alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0\end{cases}$$

在 $[a,b]$ 上的连续解，其中 $\delta(x)$ 为广义函数，称为边值问题(3.7-3)、(3.7-2)的 Green 函数，记为 $G(x,t)$。

$G(x,t)$ 作为 x 的函数，在 $[a,b]$ 上连续；它关于 x 的一阶导数以 $x=t$ 为间断线；$G(x,t)$ 作为 x 的函数在 $[a,t)$，$(t,b]$ 是 $L[y]=0$ 的解；它在区间 $[a,b]$ 的端点满足下列条件

$$\alpha_1G_x'(a,t)-\beta_1G(a,t)=0;\quad \alpha_2G_x'(b,t)+\beta_2G(b,t)=0$$

Green 函数的求法，见附录。

定理 3.7.1 (**Hilbert 第一定理**) 对于任何可积函数 $f(x)$，边值问题(3.7－1)、(3.7－2)的解 $y(x)$可表示为

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t \tag{3.7-4}$$

式中 $G(x,t)$是此边值问题的 Green 函数。

证明 对 $u=y(x)$，$v=G(x,t)$使用第二 Green 公式

$$\int_a^b vL[u] - uL[v]\mathrm{d}x = k(x)\left[v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_a^b$$

并利用 $L[G]=-\delta(x-t)$及 $y(x)$，$G(x,t)$均满足边界条件(3.7－2)，得到

$$\begin{aligned}&\int_a^b \{G(x,t)L[y] - y(x)L[G]\}\mathrm{d}x \\ &= k(x)[G(x,t)y'(x) - y(x)G'_x(x,t)]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

即

$$-\int_a^b G(x,t)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b y(x)\delta(x-t)\mathrm{d}x = 0$$

于是

$$\int_a^b G(x,t)f(x)\mathrm{d}x = y(t)$$

由 Green 函数的对称性

$$\int_a^b G(t,x)f(x)\mathrm{d}x = y(t)$$

变量 x，t 互换，就得到式(3.7－4)。

定理 3.7.2 (**Hilbert 第二定理**) 对于任意的连续函数 $f(x)$，函数

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

是边值问题(3.7－1)、(3.7－2)的解。

证明 $y(x)$在(a,b)显然连续。

$$y'(x) = \int_a^b G'_x(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

于是 $\qquad \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = \int_a^b [\alpha_1 G'_x(a,t) - \beta_1 G(a,t)]f(t)\mathrm{d}t$

由 Green 函数的定义

$$\alpha_1 G'_x(a,t) - \beta_1 G(a,t) = 0$$

所以

$$\alpha_1 y'(a) - \beta_1 y'(a) = 0$$

同理可得

$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

所以 $\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 满足边界条件(3.7－2)。

再计算 $L\left[\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right]$：

$$\begin{aligned}L\left[\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right] &= \int_a^b L[G]f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b \delta(x-t)f(x)\mathrm{d}t = -f(x)\end{aligned}$$

所以 $\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 满足方程(3.7－1)，于是 $\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 是边值问题(3.7－1)、(3.7－

2)的解。

定理 3.7.1 与 3.7.2 说明了求微分方程边值问题(3.7－1)、(3.7－2)的解，可以化为求对应的 Green 函数。

例 3.7.1 解边值问题

$$\begin{cases} y'' - y = x & (3.7-5) \\ y(0) = y(1) = 0 & (3.7-6) \end{cases}$$

解 边值问题

$$\begin{cases} y'' - y = 0 & (3.7-7) \\ y(0) = y(1) = 0 & (3.7-8) \end{cases}$$

只有零解，因此它的 Green 函数存在。

求出边值问题(3.7－7)、(3.7－8)的 Green 函数

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \dfrac{-\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

由定理 3.7.1，边值问题(3.7－5)、(3.7－6)的解为

$$\begin{aligned} y(x) &= -\int_0^1 G(x,t)t\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} t\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} 1}\{\operatorname{sh}(x-1)[x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \operatorname{sh} x[1 - x\operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1)]\} \\ &= -x + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \end{aligned}$$

例 3.7.2 解边值问题

$$\begin{cases} y'' = f[x, y(x)] & (3.7-9) \\ y(0) = y(1) = 0 & (3.7-10) \end{cases}$$

解 $f[x,y(x)]$一般是 $y(x)$的非线性泛函，但式(3.7－9)关于 y''是线性的，因此是一个拟线性二阶常微分方程。

先求出

$$\begin{cases} y''(0) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数

$$G(x,t) = \begin{cases} (t-1)x & 0 \leqslant x \leqslant t \\ (x-1)t & t \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

由定理 3.7.1，边值问题(3.7－9)、(3.7－10)的解是积分方程

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t) f[t, y(t)]\mathrm{d}t \qquad (3.7-11)$$

的解，方程(3.7－11)是一类重要的非线性积分方程，即 **Hammerstein 积分方程**。

§ 3.8 Steklov 展开定理

作为 Hilbert-Schmidt 定理的一个应用，本节证明 Steklov 展开定理，它是数学物理方程分离变量法理论基础中的一个重要定理。

1. Sturm-Liouville 问题与第二类 Fredholm 方程的等价性

例 3.8.1 有限区间 $[a,b]$ 上的 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} L[y] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)y'(x)] - q(x)y(x) = -\lambda\rho(x)y(x) & (3.8-1) \\ \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0; \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 & (3.8-2) \end{cases}$$

与积分方程

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{3.8-3}$$

等价。式中 $k(x)$，$q(x)$，α_1，α_2，β_1，β_2 的条件同 § 3.7；$\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$，$\rho_0$ 为正常数；$G(x,t)$ 是

$$\begin{cases} L[y] = 0 & (3.8-4) \\ \alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0; \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 & (3.8-2) \end{cases}$$

的 Green 函数。

证明 由 Hilbert 第一定(定理 3.7.1)，上述 Sturm-Liouville 问题的解由

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)\mathrm{d}t$$

给出，即 Sturm-liouville 问题的解满足第二类 Fredholm 积分方程(3.8－3)。

反过来，由 Hilbert 第二定理(定理 3.7.2)可推知，积分方程(3.8－3)的解，是 Sturm-Liouville 问题(3.8－1)、(3.8－2)的解。

因此，Sturm-Liouville 问题(3.8－1)、(3.8－2)与积分方程(3.8－3)等价。

2. Steklov 展开定理

定理 3.8.2 (**Steklov 展开定理**) 如果任意的二阶连续可微函数 $f(x)$ 满足边界条件(3.8－2)，则它可以按边值问题(3.8－1)、(3.8－2)的特征函数系 $\{y_p(x)\}$ 展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p y_p(x)$$

式中 $f_p = \int_a^b f(t)\rho(t)y_p(t)\mathrm{d}t$

证明 积分方程(3.8－3)可以对称化，为此，作未知函数的代换 $\psi(x) = y(x)\cdot\sqrt{\rho(x)}$，于是方程(3.8－3)化为

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda\int_a^b G(x,t)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(t)}\psi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_a^b l(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.8-5}$$

式中 $l(x,t)=G(x,t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}$ 是对称核。设它的特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n，…，对应的特征函数为 $\psi_1(x)$，…，$\psi_n(x)$，…。由 Sturm-Liouville 问题(3.8-1)、(3.8-2)与积分方程(3.8-5)的等价性，与边值问题(3.8-1)、(3.8-2)的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n，…，和特征函数 $\varphi_1(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…(同时也是方程(3.8-3)的特征值和特征函数)相对应，有积分方程(3.8-5)的特征值 λ_1，…，λ_n，…和特征函数 $\psi_1(x)$，…，$\psi_n(x)$，…。

由于 $f(x)$ 二阶连续可微，所以 $L[f(x)]$ 连续。

当
$$L[f(x)]=-\rho(x)h(x) \tag{3.8-6}$$
式中 $h(x)$ 为连续函数，而 $f(x)$ 又满足边界条件(3.8-2)时，由 Hilbert 第一定理(定理 3.7.1)可知，方程(3.8-6)的解可以表示为

$$f(x)=\int_a^b G(x,t)\rho(t)h(t)\mathrm{d}t$$

与§3.6一样，利用 Hilbert-Schmidt 展开定理(定理 3.4.1)得出：$f(x)$ 可以展为方程(3.8-5)的特征函数系 $\{\psi_p(x)\}$ 的绝对且一致收敛的级数，或展为方程(3.8-3)的特征函数系(同时就是边值问题(3.8-1)、(3.8-2)的特征函数系 $\{y_p(x)\}$ 的绝对且一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}f_p y_p(x)$$

式中
$$f_p=\int_a^b f(x)\rho(x)y_p(x)\mathrm{d}x$$

§3.9 含参数的边值问题及对应的积分方程

考虑非齐次微分方程的边值问题

$$\begin{cases}L[y]=\lambda y+h(x) & (3.9-1)\\ V_k(y)=0\quad(k=1,2,\cdots,n) & (3.9-2)\end{cases}$$

式中 $L[y]=a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)y(x)$；

$V_k(y)=\alpha_{k0}y(a)+\alpha_{k1}y'(a)+\cdots+\alpha_{kn-1}y^{(n-1)}(a)+\beta_{k0}y(b)+\beta_{k1}y'(b)+\cdots+\beta_{kn-1}y^{(n-1)}(b)$

V_1，V_2，…，V_n 线性无关，$h(x)$ 为已知函数，λ 为参数。

定理 3.9.1 如果边值问题

$$L[y]=0,\quad V_k(y)=0$$

的 Green 函数为 $G(x,t)$，则问题(3.9-1)、(3.9-2)等价于积分方程

$$y(x)=-\lambda\int_a^b G(x,t)y(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{3.9-3}$$

式中
$$f(x)=-\int_a^b G(x,t)h(t)\mathrm{d}t$$

证明 与定理 3.7.1 的证明相类似，可得到问题(3.9-1)、(3.9-2)的解由下式表出

$$\begin{aligned}y(x)&=-\int_a^b G(x,t)[\lambda y(t)+h(t)]\mathrm{d}t\\&=-\lambda\int_a^b G(x,t)y(t)\mathrm{d}t-\int_a^b G(x,t)h(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

此即方程(3.9－3)

例 3.9.1 把边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = x & (3.9-4) \\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 & (3.9-5) \end{cases}$$

化为等价的积分方程。

解 先求出

$$y'' = 0, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

的 Green 函数

$$G(x,t) = \begin{cases} x\left(1 - \dfrac{2}{\pi}t\right) & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ t\left(1 - \dfrac{2}{\pi}x\right) & (t \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

由定理 3.9.1，对应的积分方程为

$$y(x) = \lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)y(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)t\mathrm{d}t$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)t\mathrm{d}t = \int_0^x t\left(1 - \frac{2}{\pi}x\right)t\mathrm{d}t + \int_x^{\frac{\pi}{2}} x\left(1 - \frac{2}{\pi}t\right)t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi^2}{4}x - \frac{1}{6}x^3$$

因此所求的积分方程为

$$y(x) - \lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t)y(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{4}x$$

§ 3.10 对称核的第一特征值 正定核

1. 对称核的第一特征值

第二类 Fredholm 方程的解，通常可用近似方法求出。迭代法是其中的一种，在已经知道近似序列收敛于原方程解的情况下，有限次迭代就可以得到近似解。由于式（2.1－10）或（2.1－11）当且仅当$|\lambda|<|\lambda_1|$时收敛，其中 λ_1 是积分方程绝对值最小的特征值，称为**第一特征值**。因此在参数 λ 的绝对值小于第一特征值的绝对值($|\lambda|<|\lambda_1|$)时，就可以使用迭代法。也就是说，求第一特征值对解积分方程很重要。此外，第一特征值还有重要的实际意义。这里只给出有关它的一个定理，利用此定理可以由变分方法直接求出第一特征值来，具体求法在第七章中介绍。

定理 3.10.1 对称核 $k(x,t)$的第一特征值 λ_1 的绝对值的倒数$\dfrac{1}{\lambda_1}$是在

$$\int_a^b p^2(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad (3.10-1)$$

的条件下($p(x)$在$[a,b]$连续)

$$\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{3.10-2}$$

的绝对值的极大值；此极大值在与 λ_1 对应的特征函数 $\varphi_1(x)$ 上取到

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| = \left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$$

证明 一般情况的证明比较复杂。以下在核 $k(x,t)$ 的一切特征值 λ_k 均是正数的情况下给予证明。

设(正)特征值按递增顺序排列为

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p \leqslant \cdots \tag{3.10-3}$$

由于 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，按核 $k(x,t)$ 的特征函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 作 Fourier 展开

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\varphi_k(x)$$

由 Hilbert-Schmidt 定理(定理 3.4.1)，$\int_a^b k(x,t)p(t)\mathrm{d}t$ 亦可按 $\{\varphi_k(x)\}$ 作 Fourier 展开

$$\int_a^b k(x,t)p(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

上式两端乘以 $p(x)$，再关于 x 从 a 到 b 积分有

$$J = \int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2}{\lambda_k} \tag{3.10-4}$$

由 Bessel 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \leqslant \int_a^b p^2(x)\mathrm{d}x = 1$$

再由(3.10-3)得到

$$\left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \tag{3.10-5}$$

因此 $\left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$ 的极大值为$\frac{1}{\lambda_1}$；而当 $p_1=0$ 且 $p_k=0(k=2,3,\cdots)$ 时，式(3.10-5)中的等号成立，因此当 $p(x)=\varphi_1(x)$ 时，$\left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$ 取到极大值$\frac{1}{\lambda_1}$。

同样，在核的所有特征值为正的情况下，可以证明。

定理 3.10.2 对称核 $k(x,t)$ 的第二特征值 λ_2 的绝对值的倒数$\frac{1}{\lambda_2}$是在满足

$$\int_a^b p^2(x)\mathrm{d}x = 1$$

且

$$\int_a^b p(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.10-6}$$

的条件下，积分(3.10-2)的绝对值的极大值，此极大值在与 λ_2 对应的特征函数 $\varphi_2(x)$ 上取到

$$\left|\frac{1}{\lambda_2}\right| = \left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi_2(x)\varphi_2(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$$

更一般地，对称核 $k(x,t)$ 的第 n 特征 λ_n 的绝对值的倒数 $\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$ 是在满足式(3.10-1)、(3.10-6)及

$$\int_a^b p(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int_a^b p(x)\varphi_{n-1}(x)\mathrm{d}x = 0$$

的条件下，积分(3.10－2)的绝对值的极大值，此极大值在与 λ_n 对应的特征函数 $\varphi_n(x)$ 上取到

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| = \left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi_n(x)\varphi_n(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$$

对于核 $k(x,t)$ 的特征值全是正的情况，定理 3.10.1 的结论是：

积分 $\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 的极大值为 $\frac{1}{\lambda_1}$。当特征值全是负的时，定理的结论就应该是：积分 $\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 的极小值为 $\frac{1}{\lambda_1}$，结论的证明是相类似的。类似地，定理 3.10.2 的结论，当特征值全是负数时，应该是：积分 $\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 的极小值为 $\frac{1}{\lambda_n}$。

如果核的特征值可正可负，则积分(3.10－2)的一系列极大值问题，引出正特征值的倒数；积分(3.10－2)的一系列极小值问题，引出负特征值的倒数。

2. 对称正定核

以下利用式(3.10－4)来定义一类特殊的对称核——对称正定核(负定核)。

定义 3.10.1 对于对称核 $k(x,t)$，如果式(3.10－4)中的积分 $J\geqslant 0$，则称核 $k(x,t)$ 为半正定的；如果 $J\leqslant 0$，则称 $k(x,t)$ 为半负定的。

定理 3.10.3 对称核 $k(x,t)$ 为半正(负)定核的充要条件是，它的所有特征值是正(负)的。

证明 充分性 如果 $k(x,t)$ 的所有特征值是正的，则由式(3.10－4)，立即可得 $J\geqslant 0$，即 $k(x,t)$ 为半正定核。

必要性 用反证法证。如果 $k(x,t)$ 只有一个负特征值，例如 $\lambda_1<0$，则在式(3.10－4)中用 $\varphi_1(x)$(λ_1 对应的特征函数)代替 $p(x)$，由函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的标准正交性，$p_1=0$，而其余的 p_k $(k=2,3,\cdots)$ 都为零。于是式(3.10－4)的右端等于 $\frac{1}{\lambda_1}$，因而是负的，这与 $J\geqslant 0$ 矛盾。

定义 3.10.2 若对于任何不恒等于零的连续函数 $p(x)$，$J>0(J<0)$，则称对称核 $k(x,t)$ 为正定核(负定核)。

定义 3.10.3 若对于连续对称核 $k(x,t)$，如果不存在任何不恒等于零的连续函数与 $k(x,t)$ 的所有特征函数正交，则称核 $k(x,t)$(在连续函数类中)完备。*

对于对称核 $k(x,t)$ 来说，正定与完备是等价的，即成立下面的定理：

定理 3.10.4 对称半正(负)定核 $k(x,t)$ 是正定(负定)核的充要条件是，$k(x,t)$ 是完备核。

证明 必要性 设核 $k(x,t)$ 为半正定核，由定理 3.10.3，它的所有特征值 λ_k 全部是正数。于是，只有当函数 $p(x)$ 的所有 Fourier 系数 p_k 都等于零，即 $p(x)$ 与核的所有特征函数 $\varphi_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 都正交时，(3.10－4)式右端才变为零。由定义 3.10.3，$k(x,t)$ 是完备核。

充分性 如果 $k(x,t)$ 为完备核，则不存在与它的所有特征函数正交的、不恒等于零的连续函数，因此在 Fourier 系数 $p_k(k=1,2,\cdots)$ 中，至少有一个不为零，因此由式(3.10－4)定义的积分 J 严格为正，即 $k(x,t)$ 为正定核。

---

* 注：在连续函数类中，核完备与特殊函数系的完备性是不等价的，若特征函数系完备，则核为完备核；反之不一定成立。但对于比连续更广的函数类，核的完备与特征函数系完备是一致的。

参 考 文 献

1 陈传璋等. 积分方程论及其应用. 第1版，上海：上海科学技术出版社，1987

2 Смирнов В И，高等数学教程4卷1分册. 北京：高等教育出版社，1958

3 Goursat, Edouard. Integral Eguations Calculus of Variations. New York: Dover Publications, Inc., 1964

4 Pogorzelski W. Integral Equations and Their Application, Vol I, Warszawa: Pwnpolish Scientific Publishers, 1966

5 Shaposhnikova T O et al. Integral Equations. A Reference Text. Leyden: Noordhoff, 1975

6 Vladimirov V S. Eguations of Mathematical Physics. Moscow: Mir Pubs USSR, 1984

7 Math Zeitschrift. V. 9; H. 3/4, 1921

习 题

1. 求下列对称核的特征值与特征函数。

(1) $k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \sin t\cos x & \left(t\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

(2) $k(x,t)=\begin{cases}t(x+1) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ x(t+1) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(3) $k(x,t)=\begin{cases}(x+1)(t-2) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ (t+1)(x-2) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(4) $k(x,t)=\begin{cases}x(t-1) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ t(x-1) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(5) $k(x,t)=e^{-|x-t|}\quad (0\leqslant x,t\leqslant 1)$

(6) $k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \sin t\cos x & (t\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$

(7) $k(x,t)=\begin{cases}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) & (0\leqslant x<t)\\ \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) & (t\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$

(8) $k(x,t)=\begin{cases}-e^{-t}\operatorname{sh} x & (0\leqslant x\leqslant t)\\ -e^{-x}\operatorname{sh} t & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(9) $k(x,t)=\begin{cases}\sin x\sin(t-1) & (-\pi\leqslant x\leqslant t)\\ \sin t\sin(x-1) & (t\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$

(10) $k(x,t)=\begin{cases}-x & (0\leqslant x\leqslant t)\\ -t & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

2. 设 $k(x,t)$ 为对称核，求证：$k(x,t)$ 的二次迭核 $k_2(x,t)$ 只有正的特征值。

3. 设 $k(x,t)$ 为斜对称核，即

$$k(t,x)=-k(x,t)$$

则它的所有特征值全是虚数。

4. 设 $k(x,t)$ 为对称核，求证：成立下列等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^n} = A_n \quad (n = 2,3,\cdots)$$

式中 λ_i 是特征值，A_n 为核 $k(x,t)$的 n 次迹。

5. 利用 1.(1)，(4)，(5)的结果，求下列级数的和。

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i^2-1)^2}$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}$

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu_i^2)^2}$,式中 μ_i 是方程 $2\cot\mu = \mu - \frac{1}{\mu}$ 的根。

6. 利用对称核关于特征函数的展开式，证明下列等式。

(1) $\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2} = \begin{cases} x(1-t) & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ t(1-x) & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$

(2) $\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \begin{cases} x & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ t & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$

7. 解下列齐次积分方程。

(1) $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \arccos x\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

(2) $\varphi(x) - \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |x|\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

(3) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} \cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

(4) $\varphi(x) + 6\int_0^1 (x^2 - 2xt)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$

8. 解下列非齐次积分方程。

(1) $\varphi(x) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos 2x$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} \sin x\cos t & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \sin t\cos x & \left(t \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(2) $\varphi(x) - \lambda\int_0^{\pi} k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x - \pi$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} \sin t\cos x & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \cos t\sin x & (t \leqslant x \leqslant \pi) \end{cases}$

(3) $\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{x}{2}$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2} & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \frac{t(2-x)}{2} & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$

(4) $\varphi(x) - \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\, x$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sh}\, x & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{sh}\, t & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$

(5) $\varphi(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x_e^x$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sh}\, x\mathrm{sh}(t-1)}{\mathrm{sh}1} & (0 \leqslant x \leqslant t) \\ \frac{\mathrm{sh}\, t\mathrm{sh}(x-1)}{\mathrm{sh}1} & (t \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$

(6) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\operatorname{ch} x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \dfrac{\operatorname{ch} t\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(7) $\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

(8) $\varphi(x)-\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) & (t\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$

(9) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}x(t-1) & (0\leqslant x\leqslant t)\\ t(x-1) & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

9. 用 Green 函数解下列边值问题。

(1) $y''+y=x, y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(2) $y''+\pi^2 y=\cos\pi x$, $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$

(3) $y''+y=x^2$, $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(4) $y''-y=2\operatorname{sh}1$, $y(0)=y(1)=0$

(5) $y^{(4)}=1$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(1)=y'''(1)=0$

(6) $y''-y=-2\mathrm{e}^x$, $y(0)=y'(0)$, $y(l)+y'(l)=0$

10. 把下列边值问题化为积分方程。

(1) $y''=\lambda y+x^2$, $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(2) $y'''+\lambda y=2x$, $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=y'(1)$

(3) $y''+\frac{\pi^2}{4}y=\lambda y+\cos\frac{\pi x}{2}$, $y(-1)=y(1)$; $y'(-1)=y'(1)$

(4) $y''+\lambda y=e^x$, $y(0)=y'(0)$; $y(1)=y'(1)$

(5) $y''+\lambda y=2x+1$, $y(0)=y'(1)$; $y'(0)=y(1)$

(6) $y''=\lambda y+x^2$, $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

11. 设 $k(x,t)=\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1$,求

$|(k\varphi,\varphi)|=\left|\int_0^\pi\int_0^\pi k(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$ 在下述条件下的极大值:

$$(\varphi,\varphi)=\int_0^\pi\varphi^2(x)\mathrm{d}x=1$$

12. 设 $k(x,t)=xt+x^2t^2$, $-1\leqslant x$, $t\leqslant 1$, 求

$$|(k\varphi,\varphi)|=\left|\int_{-1}^1\int_{-1}^1 k(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$$

在下述条件下的极大值:

$$(\varphi,\varphi)=\int_{-1}^1\varphi^2(x)\mathrm{d}x=1$$

13. 利用题 1 解下列非齐次对称核积分方程。

(1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

式中　$k(x,t)=\begin{cases}(t-1)x & (0\leqslant x\leqslant t)\\(x-1)t & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin\pi x\cos\frac{\pi}{2}x$

式中　$k(x,t)=\begin{cases}-x & (0\leqslant x\leqslant t)\\-t & (t\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=x-\pi$

式中　$k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t & (0\leqslant x\leqslant t)\\\cos x\sin t & (t\leqslant x\leqslant \pi)\end{cases}$

第四章　Volterra 方程

如果当 $x<t\leqslant b$ 时定义核 $k(x,t)=0$，则 Volterra 方程可以看为 Fredholm 方程的特殊情况，Fredholm 方程的理论适用于 Volterra 方程。但是，Volterra 方程有它的特点。例如，第二类齐次 Volterra 方程不存在特征值，即第二类非齐次 Volterra 方程对任意(连续的)自由项都有解；对于 Volterra 方程来说，在一定条件下第一类方程可以化为第二类方程，但第一类 Fredholm 方程一般不能化为第二类 Fredholm 方程。因此有必要对 Volterra 方程的理论作单独的叙述。

本章首先讨论第二类 Volterra 方程的逐次逼近法，引出它的迭核及解核，并给出特殊类型 Volterra 方程解核的求法；介绍化第一类 Volterra 方程为第二类方程的方法；最后给出特殊类型 Volterra 方程——Abel 方程解的表达式。

§4.1　第二类 Volterra 方程

1. 逐次逼近法，解的存在惟一性

同第二类 Fredholm 方程一样，第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{4.1-1}$$

也可以用逐次逼近法求解，其步骤与 §2.1 中所叙述的完全相同。此外，还可以按下列步骤来求式(4.1-1)的解，求出的结果与 §2.1 中所得到的结果一致。

设方程(4.1-1)的解存在且具有以下形式

$$\varphi(x)=\psi_0(x)+\psi_1(x)\lambda+\cdots+\psi_n(x)\lambda^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\lambda^n \tag{4.1-2}$$

把式(4.1-2)代入(4.1-1)，比较两端 λ 的同次幂的系数，得到

$$\psi_0(x)=f(x)$$

$$\psi_1(x)=\int_0^x k(x,t)\psi_0(t)\mathrm{d}t$$

$$\psi_2(x)=\int_0^x k(x,t)\psi_1(t)\mathrm{d}t$$

$$\cdots\cdots$$

$$\psi_n(x)=\int_0^x k(x,t)\psi_{n-1}(t)\mathrm{d}t \tag{4.1-3}$$

于是式(4.1-2)、(4.1-3)给出了方程(4.1-1)的解。

在 §2.1 中，级数(2.1-11)当参数 λ 满足一定条件时收敛，但对第二类 Volterra 方程(4.1-1)，级数(4.1-2)对任意的 λ 绝对且一致收敛，于是积分方程(4.1-1)对任意 λ 存在惟一解。事实上，Volterra 在 Fredholm 对第二类 Fredholm 方程进行研究之前的 1896—1897 年，

就从讨论某个生态平衡问题出发，首先提出并开始系统研究积分上限可变的积分方程，即后来以他的名字命名的 Volterra 方程，他证明了

定理 4.1.1 如果核 $k(x,t)$ 及自由项 $f(x)$ 是实连续函数，则第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

对任意的 λ 存在惟一的连续解，且解可以用逐次逼近法求出。

证明 由于 $|f(x)|\leqslant m$，$|k(x,t)|\leqslant M$，故可依次对 $\psi_n(x)$ 作估计

$$|\psi_0(x)| \leqslant m$$

$$|\psi_1(x)| \leqslant \int_a^x |k(x,t)||\psi_0(x)|\mathrm{d}t \leqslant mM(x-a)$$

$$|\psi_2(x)| \leqslant \int_a^x |k(x,t)||\psi_1(x)|\mathrm{d}t \leqslant mM^2\int_a^x (t-a)\mathrm{d}t = mM^2\frac{(x-a)^2}{2!}$$

$$\cdots\cdots$$

$$|\psi_n(x)| \leqslant m\frac{[M(x-a)]^n}{n!}$$

又由于 $a\leqslant x\leqslant b$，所以级数(4.1-2)的一般项 $\psi_n(x)\lambda^n$ 的模不大于正数 $m[|\lambda|M(b-a)]^n/n!$，对任何 λ，以上述正数为一般项的数项级数是收敛的，因此级数(4.1-2)在 $[a,b^*]$($b^*<b$)上绝对且一致收敛，它的和函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且满足积分方程(4.1-1)。

2. 迭核 解核

与第二类 Fredholm 方程一样，可引出第二类 Volterra 方程的迭核、解核，只要把式(2.1-7)的积分限 a、b 换成 t、x；解的表达式中的积分限从 a、b 换为 a、x 就可以了。事实上，从前面导出的公式得到

$$\psi_0(x) = f(x)$$

$$\psi_1(x) = \int_a^x k(x,t)\psi_0(t)\mathrm{d}t = \int_a^x k(x,t)f(x)\mathrm{d}t$$

$$\psi_2(x) = \int_a^x k(x,u)\psi_1(u)\mathrm{d}u = \int_a^x k(x,u)\left[\int_a^u k(u,t)f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$= \int_a^x\left[\int_t^x k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$

设

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u$$

则

$$\psi_2(x) = \int_a^x k_2(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$\cdots\cdots$$

$$\psi_n(x) = \int_a^x k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (4.1-4)$$

式中

$$k_n(x,t) = \int_t^x k(x,u)k_{n-1}(u,t)\mathrm{d}u \qquad (4.1-5)$$

由式(4.1-2)、(4.1-4)有

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x k_n(x,t)f(x)\mathrm{d}t\cdot\lambda^n$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x,t) f(t) \mathrm{d}t$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^x R(x,t;\lambda) f(t) \mathrm{d}t \tag{4.1-6}$$

式中

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x,t) \tag{4.1-7}$$

是积分方程(4.1-1)的解核。

在形式上，式(4.1-6)与式(2.1-10)一样，差别仅仅是积分限从 a、b 换成 a、x；迭核表达式(2.1-7)与(4.1-5)的不同之处在于积分限从 a、b 换成 t、x。

因此，对于第二类 Volterra 方程，只要求出它的迭核，从而求出它的解核，由式(4.1-6)就可以得到它的解。

例 4.1.1 求方程 $\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + e^x$ 的解。

解 先求迭核

$$k_1(x,t) = k(x,t) = 1$$

由式(4.1-5)

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,u)k_1(u,t)\mathrm{d}u = \int_t^x \mathrm{d}u = (x-t)$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x k(x,u)k_2(u,t)\mathrm{d}u = \int_t^x (u-t)\mathrm{d}u = \frac{(x-t)^2}{2}$$

……

$$k_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

由式(4.1-7)

$$R(x,t;1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{(x-t)}$$

因此方程的解

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-t)}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$$

实际上原方程可化为微分方程的初值问题

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + \mathrm{e}^x, \varphi(0) = 1$$

它的解与用迭核求出的解相同。

对一般的核，用式(4.1-5)求迭核时，计算很复杂。但对一些特殊类型的核有一些简单的方法。

定理 4.1.2 假设第二类 Volterra 方程的核 $k(x,t)$是 $x-t$ 的 $n-1$ 次多项式，它具有下列形式

$$k(x,t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \frac{a_2(x)(x-t)^2}{2!} + \cdots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \tag{4.1-8}$$

式中 函数 $a_k(x)$在$[0,a]$上连续。

如果 $g(x,t;\lambda)$是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n} - \lambda\Big[a_0(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}x^{n-1}} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-2}g}{\mathrm{d}x^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)g\Big] = 0 \tag{4.1-9}$$

满足条件

$$g\Big|_{x=t} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=t} = \cdots = \frac{\mathrm{d}^{n-2}g}{\mathrm{d}x^{n-2}}\Big|_{x=t} = 0, \frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_{x=t} = 1 \tag{4.1-10}$$

的解为 $g(g,t;\lambda)$，则解核

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^n g(x,t;\lambda)}{\mathrm{d}x^n} \tag{4.1-11}$$

定理的证明在此不列出，请参阅文献〔4〕。

例 4.1.2 求积分方程 $\varphi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x)$ 的解核。

解 此时 $k(x,t)=x-t,\lambda=1,n=2,a_1(x)=1,a_k(x)=0(k=0,2,3,\cdots)$。方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(x,t;1)}{\mathrm{d}x^2} - g(x,t;1) = 0$$

的解 $g(x,t;1)=c_1(t)\mathrm{e}^x+c_2(t)\mathrm{e}^{-x}$

由条件(4.1-10)，即 $g|_{x=t}=0,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=t}=1$

$$\begin{cases} c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0 \\ c_2(t)\mathrm{e}^t - c_2(t)\mathrm{e}^{-t} = 1 \end{cases}$$

于是
$$c_1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, c_2(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$$

因此
$$g(x,t;1) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x-t} - \mathrm{e}^{-(x-t)}) = \mathrm{sh}(x-t)$$

由式(4.1-11)

$$R(x,t;1) = \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = [\mathrm{sh}(x-t)]''_{xx} = \mathrm{sh}(x-t)$$

求解核的另一方法是，对原方程两端关于 x 求导，得到

$$\varphi'(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + f'(x)$$

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + f''(x) \tag{4.1-12}$$

且
$$\varphi(0) = f(0), \varphi'(0) = f'(0) \tag{4.1-13}$$

而式(4.1-12)、(4.1-13)的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

于是又一次得到解核 $R(x,t;1)=\mathrm{sh}(x-t)$

类似地，成立

定理 4.1.3 假设 Volterra 方程的核 $k(x,t)$是 $t-x$ 的 $n-1$ 次多项式，且具有以下形式

$$k(x,t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \cdots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1} \tag{4.1-14}$$

则解核

$$R(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^n g(t,x;\lambda)}{\mathrm{d}t^n} \tag{4.1-15}$$

式中　$g(t,x;\lambda)$是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}t^n}+\lambda\Big(b_0(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}(t)y\Big)=0 \tag{4.1-16}$$

满足下列条件的解

$$g\big|_{t=x}=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=x}=\cdots=\frac{\mathrm{d}^{n-2}g}{\mathrm{d}t^{n-2}}\bigg|_{t=x}=0,\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}t^{n-1}}\bigg|_{t=x}=1 \tag{4.1-17}$$

例 4.1.2 用定理 4.1.3 来解亦可得到同样的结果。

例 4.1.3　利用解核求下述方程的解

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{x^2}+\int_0^x \mathrm{e}^{x^2-t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

解　先求解核。

$$k_1(x,t)=k(x,t)=\mathrm{e}^{x^2-t^2}$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_1(u,t)\mathrm{d}u=\int_t^x \mathrm{e}^{x^2-u^2}\mathrm{e}^{u^2-t^2}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x^2-t^2}(x-t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_2(u,t)\mathrm{d}u=\int_t^x \mathrm{e}^{x^2-u^2}\mathrm{e}^{u^2-t^2}(u-t)\mathrm{d}u$$

$$=\mathrm{e}^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^2}{2!}$$

……

$$k_n(x,t)=\mathrm{e}^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

所以　$$R(x,t;1)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{x^2-t^2}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\mathrm{e}^{x^2-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-t)^n}{n!}=\mathrm{e}^{x^2-t^2}\cdot\mathrm{e}^{x-t}$$

于是方程的解

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{x^2}+\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{e}^{x^2-t^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x+x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2+x}$$

3. 化第二类方程为常微分方程的 Cauchy 问题

在§1.2 中看到，线性常系数微分方程的 Cauchy 问题可化为核仅是 $x-t$ 函数的**第二类卷积型的 Volterra 积分方程**。而在许多情况，第二类 Volterra 积分方程(组)也可以化为常微分方程(组)的某个 Cauchy 问题。

如果积分方程(4.1-1)的核 $k(x,t)$与自由项 $f(x)$有连续导数 $k_x'(x,t)$及 $f'(x)$，则对此方程(一次或多次)求导，在许多情况能把它化为常微分方程的某个 Cauchy 问题。特别，当核 $k(x,t)$是形如 $x-t$ 乘幂的多项式时，总能达到目的。

例 4.1.4　解方程

$$\varphi(x)=\mathrm{ch}\,x-\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{4.1-18}$$

解　方程(4.1-18)两端求导，得到

$$\varphi'(x) = \text{sh } x - \int_0^x \text{ch}(x-t)\varphi(t)\text{d}t$$

$$\varphi''(x) = \text{ch } x - \int_0^x \text{sh}(x-t)\varphi(t)\text{d}t - \varphi(x)$$

由式(4.1-18)

$$\varphi''(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

初始条件为

$$\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$$

解上述 Cauchy 问题，得方程(4.1-18)的解

$$\varphi(x) = 1$$

例 4.1.5 解方程

$$\varphi(x) = 4\text{e}^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\text{d}t \tag{4.1-19}$$

解 依次求出

$$\varphi'(x) = 4\text{e}^x + 3 - \int_0^x \varphi(t)\text{d}t$$

$$\varphi''(x) = 4\text{e}^x - \varphi(x) \tag{4.1-20}$$

而

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 7 \tag{4.1-21}$$

方程(4.1-20)满足条件(4.1-21)的解为

$$\varphi(x) = 2\text{e}^x - 2\cos x + 5\sin x$$

对于第二类退化核 Volterra 方程

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \left[\sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t)\right]\varphi(t)\text{d}t \tag{4.1-22}$$

可以用解第二类退化核 Fredholm 方程相类似的方法求解。

由原方程(4.1-22)，立刻可得

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\int_0^x b_i(t)\varphi(t)\text{d}t$$

设

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int_0^x b_1(t)\varphi(t)\text{d}t \\ \cdots\cdots \\ \varphi_n(x) = \int_0^x b_n(t)\varphi(t)\text{d}t \end{cases} \tag{4.1-23}$$

于是方程(4.1-22)的解可表示为

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\varphi_i(x) \tag{4.1-24}$$

式(4.1-23)中每个式子的两端关于 x 求导，再利用式(4.1-24)得到

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) = b_1(x)f(x) + \sum_{i=1}^n b_1(x)a_i(x)\varphi_i(x) \\ \cdots\cdots \\ \varphi'_n(x) = b_n(x)f(x) + \sum_{i=1}^n b_n(x)a_i(x)\varphi_i(x) \end{cases} \tag{4.1-25}$$

且有 $$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=\cdots=\varphi_n(0)=0 \tag{4.1-26}$$

满足条件式(4.1－26)的变系数一阶线性微分方程组(4.1－25)的解一定存在。在求出$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$后，代入式(4.1－24)就可以得到原积分方程(4.1－22)的解$\varphi(x)$。但变系数一阶微分方程组的 Cauchy 问题没有一般的解法，因此上述方法仅在个别情况可以使用。

例 4.1.6 解方程

$$\varphi(x)=1+\int_1^x \frac{t}{x}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{4.1-27}$$

解 由于 $\varphi(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x t\,\varphi(t)\mathrm{d}t$，设

$$\int_1^x t\,\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi_1(x)$$

则 $$\varphi(x)=1+\frac{1}{x}\varphi_1(x) \tag{4.1-28}$$

但 $\varphi_1'(x)=x\varphi(x)$，再由式(4.1－28)，可得

$$\varphi_1'(x)=x+\varphi_1(x)，即\ \varphi_1'(x)-\varphi_1(x)=x$$

此外又有 $\varphi_1(1)=0$，解上述微分方程的定解问题得

$$\varphi_1(x)=\frac{2}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x-x-1$$

于是由式(4.1－28)，得到积分方程(4.1－27)的解

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x-x-1\right)=\frac{1}{x}(2\mathrm{e}^{x-1}-1)$$

§4.2 第一类 Volterra 方程

第一类 Volterra 方程经过求导，通常可以化为第二类 Volterra 方程。

定理 4.2.1 对于第一类 Volterra 方程

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{4.2-1}$$

若 $k(x,t)$、$f(x)$可微，$k(x,x)\neq 0(a\leqslant x\leqslant b)$，且 $k(x,x)$与$\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$分别在$[a,b]$及 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$ 连续，$f(a)=0$，则方程(4.2－1)与第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{k_x'(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{4.2-2}$$

等价。式(4.2－2)是式(4.2－1)两端对 x 求导得到的。

证明 式(4.2－1)的两端对 x 求导，得

$$k(x,x)\varphi(x)+\int_a^x k_x'(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f'(x)$$

由于在所考虑的区间上 $k(x,x)\neq 0$，上式两端除以 $k(x,x)$，就得到式(4.2－2)

另一方面，如果式(4.2－2)成立，则有

$$\left(\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right)'=f'(x)$$

于是 $$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) + C$$

但已知 $f(a)=0$，因此常数 $C=0$，这样就得到式(4.2-1)。

如果在 x 的某一值 $k(x,x)=0$，则在某些条件下，上述求导过程可以重复进行，于是第一类方程就化为第二类方程。

如果上述求导过程不能继续进行，或用其他方法亦不能化为第二类方程，则第一类 Volterra 方程可解的充要条件就是自由项 $f(x)$ 属于左端积分算子的值域。此时第一类 Volterra 方程的解可以用正则化方法得到[5]。

方程(4.2-1)亦可用另一种方法化为第二类方程。对式(4.2-1)左端的积分分部积分，设

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{4.2-3}$$

就有 $$k(x,x)\psi(x) - \int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\psi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

若 $k(x,x)\neq 0$，则

$$\psi(x) - \int_a^x \left[\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\Big/ k(x,x)\right]\cdot \psi(t)\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{k(x,x)} \tag{4.2-4}$$

当 $\dfrac{f(x)}{k(x,x)}$ 连续且核连续时，方程(4.2-4)存在惟一解 $\psi(x)$，再由式(4.2-3)，$\varphi(x)=\psi'(x)$ 就是所要求的解。

与第二类 Volterra 方程不同，第一类 Volterra 方程仅当自由项满足一系列附加条件时有解，这些条件由核 $k(x,t)$ 的性质而定。特别是，对于任何核 $k(x,t)$，方程的解在 $x=a$ 存在的必要条件，显然是 $f(a)=0$，这个条件称为**相容性条件**。

在重复上述求导过程时，每次都要注意，对自由项要求的相容性条件是否满足。

例 4.2.1　解方程

$$x^2 = \int_0^x \sin[a(x-t)]\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (a\neq 0) \tag{4.2-5}$$

解　方程两端对 x 求导，得到

$$2x = a\int_0^x \cos[a(x-t)]\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{4.2-6}$$

上式仍是一个第一类 Volterra 方程，两端再对 x 求导，就有

$$2 = a\varphi(x) - a^2\int_0^x \sin[a(x-t)]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

再由原方程(4.2-5)，可得

$$2 = a\varphi(x) - a^2x^2$$

因此 $$\varphi(x) = \frac{1}{a}(a^2x^2+2)$$

从式(4.2-5)、(4.2-6)可看出，它们都满足相容性条件 $f(0)=0$。

例 4.2.2　解方程

$$\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - 1 \tag{4.2-7}$$

解　依次求导两次，得到

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \tag{4.2-8}$$

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \tag{4.2-9}$$

式(4.2-9)是第二类 Volterra 方程，存在惟一连续解 $\varphi(x)=2\mathrm{e}^x-x-1$。但经直接代入验算，它不满足原方程(4.2-7)。这是因为方程(4.2-7)的解应满足式(4.2-8)，但方程(4.2-8)的自由项不满足相容性条件($\mathrm{e}^x|_{x=0}=1\neq0$)，于是方程(4.2-8)无解，因此方程(4.2-7)亦无解。

例 4.2.3　解方程

$$\int_0^x (2+x^2-t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2 \tag{4.2-10}$$

解　式(4.2-10)左端进行分部积分，记

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{4.2-11}$$

显然有 $\psi(0)=0$，于是

$$(2+x^2-t^2)\psi(t)\Big|_0^x - \int_0^x \psi(t)(-2t)\mathrm{d}t = x^2$$

$$2\psi(x) + 2\int_0^x t\psi(t)\mathrm{d}t = x^2$$

所以

$$\psi(x) + \int_0^x t\psi(x)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \tag{4.2-12}$$

式(4.2-12)是一个第二类 Volterra 方程，它等价于

$$\psi'(x) + r\psi(x) = x,\quad \psi(0)=0$$

解之，得

$$\psi(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

再由式(4.2-11)，$\varphi(x)=\psi'(x)$，因此方程(4.2-10)的解为

$$\varphi(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

§ 4.3　Abel 方程

形如

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t = f(x) \tag{4.3-1}$$

的积分方程，称为**广义 Abel 方程**，简称 **Abel 方程**，式中 $0<\alpha<1$。当 $\alpha=\frac{1}{2}$时，式(4.3-1)成为

$$\int_a^x \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = f(x) \tag{4.3-2}$$

1823 年，Abel 讨论了等时曲线问题，即 Abel 问题时，首先引出了形如(4.3-2)的积分方程，并用两种方法求出了它的解，Abel 方程因此得名。

Abel 方程(4.3-1)是一种特殊的第一类 Volterra 方程，它的核$\frac{1}{(x-t)^\alpha}$在积分上限 $t=x$ 有弱奇性。

Abel 方程(4.3-1)的解，可以用公式表出。此结论可由下面的定理来表述：

定理 4.3.1 设 Abel 方程 $\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t = f(x)$ 的自由项 $f(x)$ 连续可微，且 $f(a)=0$，则它有惟一的连续解

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t \tag{4.3-3}$$

证明 由于

$$f(u) = \int_a^u \frac{1}{(u-t)^\alpha}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

上式两端乘以 $\frac{\mathrm{d}u}{(x-u)^{1-\alpha}}$ 并关于 u 从 a 到 x 积分，再交换积分顺序，得到

$$\int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}}\mathrm{d}u = \int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{(x-u)^{1-\alpha}}\int_a^u \frac{\varphi(t)}{(u-t)^\alpha}\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^x \varphi(t)\left(\int_t^x \frac{\mathrm{d}u}{(x-u)^{1-\alpha}(u-t)^\alpha}\right)\mathrm{d}t$$

上式右端的内积分作变量代换 $u-t=y\ (x-t)$，得到

$$\int_t^x \frac{\mathrm{d}u}{(x-u)^{1-\alpha}(u-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{(x-t)\mathrm{d}y}{(1-y)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}y^\alpha(x-t)^\alpha}$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(1-y)^{1-\alpha}} = B(1-\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

于是
$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}}\mathrm{d}u$$

两端关于 x 求导，就有

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}}\mathrm{d}u$$

因此
$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t$$

于是，若方程(4.3-1)有解，则必为以上形式，这就证明了解的惟一性。直接代入方程(4.1-1)验证，可知(4.3-3)确为方程(4.3-1)的解，解的存在性也得以证明。

当 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ 时，方程(4.3-1)的核不是平方可积的，但当 $0<\alpha<1$，它的解总存在且惟一。

由式(4.3-3)立刻可得方程(4.3-2)的解

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t$$

由式(4.3-3)还可以得到解的另一表达式，对式(4.3-3)右端进行分部积分并利用参量积分求导公式

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}\left(\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-f(t)\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha}\Bigg|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{\alpha}\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(a)}{\alpha}(x-a)^\alpha + \frac{1}{\alpha}\int_a^x (x-t)^\alpha f'(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(f(a)(x-a)^{\alpha-1} + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f'(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\right] \tag{4.3-4}$$

表达式(4.3－4)提供了 Abel 方程(4.3－1)在更一般假设下的解。现已证明，若 $f(x)$在$[a,b]$绝对连续，则方程(4.3－1)在 Lebesgue 可积函数类中存在惟一解。

下面证明，当 $f(h)=c$(c 为常数)时，Abel 问题的解是一族旋轮线。

方程(1.2－40)的解由式(4.3－4)给出($\alpha=1/2$)

$$\varphi(y)=\frac{1}{\pi}\frac{c}{\sqrt{y}}$$

但

$$\sin\beta=\frac{1}{\varphi(y)}=\frac{\pi\sqrt{y}}{c}$$

于是

$$y=\frac{c^2}{\pi^2}\sin^2\beta=\frac{c^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\beta)$$

而由式(1.2－41)

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\tan\beta}=\frac{c^2}{\pi^2}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\tan\beta}\mathrm{d}\beta=\frac{c^2}{\pi^2}(1+\cos 2\beta)\mathrm{d}\beta$$

因此

$$x=\frac{c^2}{\pi^2}\left(\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta\right)+c_1$$

这样，Abel 问题的解由下列参数方程表示

$$\begin{cases}x=\dfrac{c^2}{\pi^2}\left(\beta+\dfrac{1}{2}\sin 2\beta\right)+c_1\\[2ex] y=\dfrac{c^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\beta)\end{cases}$$

这就证明了 Abel 问题的解是一族旋轮线。

以下利用表达式(4.3－4)来解释 Abel 问题解的一个性质。由式(1.2－41)，即 $\varphi(y)=1/\sin\beta$,因此仅当解的绝对值不小于 1 时，解才有意义。

利用证明定理 4.3.1 的方法，可以求出**推广的 Abel 方程**的解。

例 4.3.1　求方程

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{[p(x)-p(t)]^\alpha}=f(x) \tag{4.3-5}$$

的解，式中 $0<\alpha<1$，$a\leqslant c<x<b$，$p(x)$为已知的单调函数，且 $p'(x)$连续；$f(c)=0$。

解　由于 $f(u)=\int_a^u \frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{[p(u)-p(t)]^\alpha}$，于是

$$\int_a^x \frac{p'(u)f(u)}{[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}\mathrm{d}u=\int_a^x\int_a^u \frac{p'(u)\varphi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u}{[p(u)-p(t)]^\alpha[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}$$

$$=\int_a^x \varphi(t)\left(\int_t^x \frac{p'(u)\mathrm{d}u}{[p(u)-p(t)]^\alpha[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}\right)\mathrm{d}t \tag{4.3-6}$$

记

$$\int_t^x \frac{p'(u)\mathrm{d}u}{[p(u)-p(t)]^\alpha[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}=I(x,t)$$

再设 $p(u)=v$,则

$$I(x,t)=\int_{p(t)}^{p(x)} \frac{\mathrm{d}v}{[v-p(t)]^\alpha[p(x)-v]^{1-\alpha}}$$

再设 $v-p(t)=w[p(x)-p(t)]$，就得到

$$I(x,t)=\int_0^1\frac{[p(x)-p(t)]\mathrm{d}w}{w^{\alpha}[p(x)-p(t)]^{\alpha}(1-w)^{1-\alpha}[p(x)-p(t)]^{1-\alpha}}$$

$$=\int_0^1 w^{-\alpha}(1-w)^{\alpha-1}\mathrm{d}w=B(1-\alpha,\alpha)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

由式(4.3－6)

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\int_a^x\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{p'(u)f(u)}{[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}\mathrm{d}u$$

两端对 x 求导，就得到方程(4.3－5)的解

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\frac{p'(u)f(u)}{[p(x)-p(u)]^{1-\alpha}}\mathrm{d}u \tag{4.3-7}$$

例 4.3.2　求方程

$$\int_a^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\mathrm{d}t=f(x) \tag{4.3-8}$$

的解，式中 $f(a)=0$。

解　方程(4.3－8)是方程(4.3－5)的特殊情况，其中 $p(x)=x^2$，$\alpha=1/2$。因此由式(4.3－7)，立刻可得方程(4.3－8)的解

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\frac{uf(u)}{\sqrt{x^2-u^2}}\mathrm{d}u$$

类似的方法还可用来解某些多维的 Volterra 积分方程。

例 4.3.3　解方程

$$\iint_D\frac{\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(y_0-y)^2-(x_0-x)^2]^{1/2}}=f(x_0,y_0) \tag{4.3-9}$$

式中 $f(x_0,y_0)$ 为 x_0,y_0 的已知函数；D 是由 $y=0$，$y-y_0=x-x_0$ 及 $y-y_0=-(x-x_0)$ 围成的等腰直角三角形区域。

解　由于 $(y_0-y)^2-(x_0-x)^2=(y_0+x_0-y-x)(y_0-x_0-y+x)$

设
$$\xi=x+y,\eta=y-x \tag{4.3-10}$$

及 $\xi_0=x_0+y_0$，$\eta_0=y_0-x_0$，于是 Jacobi 式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{1}{2},\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=2$，而 $y=0$ 变为 $\xi+\eta=0$，$x-x_0+y-y_0$ 变为 $\xi-\xi_0$，$x-x_0-y+y_0=0$ 变为 $\eta-\eta_0$，因而

$$F(\xi_0,\eta_0)=\iint_D\frac{\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}}=\frac{1}{2}\iint_{\triangle}\frac{\Phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}} \tag{4.3-11}$$

式中　$\Phi(\xi,\eta)=\varphi(x,y)$，$F(\xi_0,\eta_0)=f(x_0,y_0)$，而△为由直线 $\xi+\eta=0$，$\xi=\xi_0$，$\eta=\eta_0$ 所围成的等腰直角三角形区域。设$\triangle_0$是 ξ_0，η_0 平面上由 $\xi_0+\eta_0=0$，$\xi_0=\alpha$，$\eta_0=\beta$ 围成的等腰直角三角形区域。由式(4.3－11)，可得

$$\frac{1}{2}\iint_{\triangle_0}=\frac{\mathrm{d}\xi_0\mathrm{d}\eta_0}{\sqrt{(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)}}\iint_{\triangle}\frac{\Phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}}=\iint_{\triangle_0}\frac{F(\xi_0,\eta_0)\mathrm{d}\xi_0\mathrm{d}\eta_0}{\sqrt{(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)}}$$

计算上式左端的四重积分，得到

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha\int_0^\beta\left(\int_\xi^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi_0}{\sqrt{(\alpha-\xi_0)(\xi_0-\xi)}}\int_\eta^\beta \frac{\mathrm{d}\eta_0}{\eta\sqrt{(\beta-\eta_0)(\eta_0-\eta)}}\right)\Phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\int_0^\alpha\int_0^\beta\Phi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\iint\limits_{\Delta_0}\frac{F(\xi_0,\eta_0)\mathrm{d}\xi_0\mathrm{d}\eta_0}{\sqrt{(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)}}$$

上式两端对 α、β 求偏导数，就有

$$\Phi(\alpha,\beta)=\frac{2}{\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\iint\limits_{\Delta_0}\frac{F(\xi_0,\eta_0)\mathrm{d}\xi_0\mathrm{d}\eta_0}{\sqrt{(\alpha-\xi_0)(B-\eta_0)}}$$

设
$$\begin{cases}\alpha=u+v\\ \beta=u-v\end{cases},\text{即}\begin{cases}u=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ v=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}\tag{4.3-12}$$

则有
$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)$$

于是
$$\varphi(u,v)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\tag{4.3-13}$$

式中
$$\psi(u,v)=\iint\limits_{D_0}\frac{f(x_0,y_0)}{\sqrt{(v-y_0)^2-(u-x_0)^2}}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

这里 D_0 是 x_0，y_0 平面上由 $y_0=0$，$y_0-v=x_0-u$ 及 $y_0-v=-(x_0-u)$ 所围成的三角形区域。变换(4.3-12)正是变换(4.3-10)的逆变换。

同一个自变量的情况一样，可以证明，形如(4.3-13)的函数满足积分方程(4.3-9)。

在研究直线边界的波的反射问题时，会引出形如(4.3-9)的积分方程。

Abel 方程(4.3-1)的解的表达式(4.3-3)，除了可用上述直接积分的方法得到外，更简捷地还可以用 Laplace 变换求出。此外，第一类卷积型 Volterra 方程亦可直接用 Laplace 变换求解，见 § 5.2。

参 考 文 献

1 Краснов М Л и др，Интегральные уравнения，изд2-е，Москва М.，"Наука"，1976

2 Математическая Энциклопедия Т. 1. Москва：Советская Энциклопедия，1980

3 Chambers Ll G. Integral Eguations：A Short Course，London：International Textbook Co. Ltd.，1976

4 E. Goursat. Course D'analysé Mathématique. 1956，T. Ⅲ：329～330

5 Математическая Энциклопедия，1980，Т. 1，754

习　题

1. 用逐次逼近法解下列方程。

(1) $\varphi(x) = 1 - x^2 + \int_0^x x\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = x - \int_0^x (x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$

(6) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x x\varphi(t)\mathrm{d}t$

(7) $\varphi(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(8) $\varphi(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1 + x^2}{1 + t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(9) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x t^p\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (p = 0,1,2,\cdots)$

2. 求下列核的解核。

(1) $k(x,t)=1$

(2) $k(x,t)=t$

(3) $k(x,t)=xt$

(4) $k(x,t)=x^2$

(5) $k(x,t)=xt^2$

(6) $k(x,t)=a^{x-t} \quad (a>0)$

(7) $k(x,t)=e^{x^2-t^2}$

(8) $k(x,t)=\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{ch}\, t}$

(9) $k(x,t)=e^{x-t}$

(10) $k(x,t)=\frac{1+x^2}{1+t^2}$

3. 求下列核的解核。

(1) $k(x,t)=2x$

(2) $k(x,t)=2-(x-t)$

(3) $k(x,t)=-2+3(x-t)$

4. 设 Volterra 方程的核仅依赖于自变量之差，$\lambda=1$

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

试证：此方程的所有迭核与解核也仅依赖于自变量之差 $x-t$。

5. 试证形如

$$k(x,t) = \frac{K(x)}{K(t)} \quad K(t) \neq 0$$

的任意核的解核为

$$R(x,t;\lambda) = \frac{K(x)}{K(t)}e^{\lambda(x-t)}$$

6. 试证：对形如

$$k(x,t) = x^p t^q \qquad p,q \text{ 为正整数}$$

的任意核，解核为

$$R(x,t;\lambda) = x^p t^q \exp\lambda\left[\frac{x^{p+q+1} - t^{p+q+1}}{p + q + 1}\right]$$

7. 利用解核解下列方程。

(1) $\varphi(x) = 1 - \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = x + \int_0^x xt\varphi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x) = \mathrm{ch}\, x + \int_0^x \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{ch}\, t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(6) $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x \mathrm{e}^{x^2-t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(7) $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(8) $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(9) $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2+x} + 2\int_0^x \mathrm{e}^{x^2-t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

8. 把下列方程化为第二类 Volterra 方程然后求解

(1) $\int_0^x \cos(x-t) \cdot \varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$

(2) $\int_0^x (2 + x^2 - t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2$

(3) $\int_1^x (2t - x)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^3 - 1$

(4) $\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$

(5) $\int_0^x (1 + x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin x$

(6) $\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = x$

(7) $\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x), f(0) = 0$

(8) $\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{(x^2/2)} - 1$

(9) $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$

9. 解下列积分方程。

(1) $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = \sin x$

(2) $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = x^{1/2}$

(3) $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^a}\mathrm{d}t = x^n \quad (0 < a < 1)$

10. 解下列积分方程。

(1) $\int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2$

(2) $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t = x^5$

(3) $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\mathrm{d}t = x^{4/3} - x^2$

(4) $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

(5) $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\mathrm{d}t = \pi x$

11. 解下列积分方程。

(1) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$

(2) $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$

(3) $\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^{3}\mathrm{e}^{\ x}$

(4) $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\, x$

(5) $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2$

(6) $\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$

(7) $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\mathrm{d}t = x^{\frac{5}{2}}$

(8) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x\sin x$

(9) $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x$

(10) $\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{x^4}{12}$

(11) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x + x^2$

(12) $\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2 J_4(2\sqrt{x})$

(13) $\int_0^x (x-2t)\varphi(t)\mathrm{d}t = -\frac{x^3}{6}$

第五章　用积分变换解积分方程

某些类型的积分方程，例如卷积型方程可以用积分变换方便地求出解来。本章主要讨论如何用常见的 Fourier 变换、Laplace 变换、Fourier 正弦余弦变换来解积分方程。最后介绍 Mellin 变换与 Hankel 变换，并利用它们解某些类型的积分方程。

用积分变换求解积分方程，基本思路是对积分方程的两边作某一种积分变换，然后利用积分变换的性质把原方程化为象函数的代数方程，再解出象函数，最后利用反变换求出象原函数——积分方程的解来。

§5.1　用 Fourier 变换解卷积型 Fredholm 积分方程

对于卷积型的第二类、第一类 Fredholm 积分方程，即当 Fredholm 积分方程的积分限为 $-\infty$，∞，核是自变数之差的函数时，可以用 Fourier 变换求出解来。

1. 第二类卷积型 Fredholm 积分方程

对于**第二类卷积型 Fredholm 积分方程**

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{5.1-1}$$

当 $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$，$k(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$时，对式(5.1-1)两边作 Fourier 变换，并利用卷积定理可得

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega) \tag{5.1-2}$$

式中 $\Phi(\omega)=\mathscr{F}\{\varphi(x)\}$，$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}$，$K(\omega)=\mathscr{F}\{k(x)\}$。当 $1-\sqrt{2\pi}K(\omega)\neq 0$ 时，从式(5.1-2)可解出

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}K(\omega)}$$

求反变换就得到

$$\varphi(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\Phi(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}K(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega$$

如果对于 ω 的某些实数值，$1-\sqrt{2\pi}K(\omega)=0$，则方程(5.1-1)通常没有在全数轴绝对可积的解。

2. 第一卷积型 Fredholm 积分方程

对于**第一类卷积型 Fredholm 积分方程**

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

两边作 Fourier 变换得

$$\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega)=F(\omega)$$

式中 $\Phi(\omega)=\mathscr{F}\{\varphi(x)\}$，$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}$。当 $K(\omega)\neq 0$ 时

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}$$

所以

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}e^{ix\omega}d\omega$$

例 5.1.1 当 $\lambda<\frac{1}{2}$时，求解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)dt \tag{5.1-3}$$

解 设 $\mathscr{F}\{\varphi(x)\}=\Phi(\omega)$，$\mathscr{F}\{f(x)\}=F(\omega)$，而

$$K(\omega)=\mathscr{F}\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{x(1-i\omega)}dx+\int_{0}^{\infty}e^{-x(1+i\omega)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2} \tag{5.1-4}$$

方程(5.1-3)两边求 Fourier 变换得

$$\Phi(\omega)=F(\omega)+\sqrt{2\pi}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\Phi(\omega)=F(\omega)+\frac{2\lambda}{1+\omega^2}\Phi(\omega)$$

所以

$$\Phi(\omega)=\frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}F(\omega)$$

因此，方程(5.1-3)的解为

$$\varphi(x)=\mathscr{F}^{-1}\{\Phi(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}F(\omega)e^{ix\omega}d\omega \tag{5.1-5}$$

例如，当 $f(x)=e^{-|x|}$时，$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$。由式(5.1-5)

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\omega}}{1-2\lambda+\omega^2}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\omega}}{(\sqrt{1-2\lambda})^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{(1-2\lambda)^2}+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega$$

$$=\mathscr{F}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(\sqrt{1-2\lambda})^2+\omega^2}\right\}$$

再由式(5.1-4)及 Fourier 变换的相似性质得

$$\varphi(x)=\frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}}{\sqrt{1-2\lambda}}$$

上式亦可用围道积分得到。

例 5.1.2 已知一个沿轴线分布的电源，它在与此轴垂直的两个平行的接地平面($y=0$ 与 $y=h$)之间形成一个静电场。设在无界空间中原来的电场强度为 E；在 $y=0$，$y=h$ 上所感应

的分布密度为 $\sigma_0(x)$ 与 $\sigma_h(x)$，则它们满足下列积分方程组

$$\begin{cases}\sigma_0(x) = \dfrac{E_y|_{y=0}}{2\pi} - \dfrac{h}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sigma_h(t)}{(t-x)^2+h^2}\mathrm{d}t & (5.1-6)\\[2ex] \sigma_h(x) = -\dfrac{E_y|_{y=h}}{2\pi} - \dfrac{h}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sigma_0(t)}{(t-x)^2+h^2}\mathrm{d}t & (5.1-7)\end{cases}$$

解 对每个方程的两边作 Fourier 变换，设 $\tilde{\sigma}_h(\omega)=\mathscr{F}\{\sigma_0(x)\}$，$\tilde{\sigma}_h(\omega)=\mathscr{F}\{\sigma_h(x)\}$，$E_y|_{y=0}=f_0(x)$，$E_y|_{y=h}=f_h(x)$，$f_0(\omega)=\mathscr{F}\{f_0(x)\}$，$\tilde{f}_h(\omega)=\mathscr{F}\{f_h(x)\}$，就有

$$\tilde{\sigma}_0(\omega) = \frac{\tilde{f}_0(\omega)}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_h(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^2+h^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$\tilde{\sigma}_h(\omega) = -\frac{\tilde{f}_h(\omega)}{2\pi} - \frac{h}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_0(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^2+h^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

变换上述两式右端的积分顺序并利用公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{t^2+h^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2h}\mathrm{e}^{-h|\omega|}$$

就得到 $\tilde{\sigma}_0(\omega)$ 与 $\tilde{\sigma}_h(\omega)$ 所满足的线性代数方程组

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}_0(\omega) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{\sigma}_h(\omega) = \dfrac{\tilde{f}_0(\omega)}{2\pi}\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{\sigma}_0(\omega) + \tilde{\sigma}_h(\omega) = -\dfrac{\tilde{f}_h(\omega)}{2\pi}\end{cases}$$

解之得

$$\tilde{\sigma}_0(\omega) = \frac{\tilde{f}_0(\omega) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{f}_h(\omega)}{2\pi - \mathrm{e}^{-2h|\omega|}}$$

$$\tilde{\sigma}_h(\omega) = \frac{-\tilde{f}_h(\omega) - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{f}_0(\omega)}{2\pi - \mathrm{e}^{-2h|\omega|}}$$

因此

$$\begin{aligned}\sigma_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\sigma}_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{f}_0(\omega) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{f}_h(\omega)}{2\pi - \mathrm{e}^{-2h|\omega|}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$\sigma_h(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{f}_h(\omega) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-h|\omega|}\tilde{f}_0(\omega)}{2\pi - \mathrm{e}^{-2h|\omega|}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega$$

3. 用 Fourier 正弦或 Fourier 余弦变换解积分方程

核为正弦函数或余弦函数，积分限为(0,∞)的积分方程，用 Fourier 正弦变换，或 Fourier 余弦变换解起来比较方便。

若 $f(t)$ 在 $[0,\infty]$ 连续且绝对可积，在 t 轴上的任何有限区间具有有限个极大值及极小值，则 $f(t)$ 的 **Fourier 正弦变换**、**Fourier 余弦变换**分别定义为

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t \tag{5.1-8}$$

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \tag{5.1-9}$$

它们的反变换分别为

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(x)\sin(tx)\mathrm{d}x \tag{5.1-10}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(x)\cos(tx)\mathrm{d}x \tag{5.1-11}$$

设 $F(x)$ 为 $f(t)(-\infty<t<\infty)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}\{f(t)\}$，当 $f(t)$ 为 t 的偶函数时，$F(x)=F_c(x)$；当 $f(t)$ 为奇函数时 $F(x)=\mathrm{i}F_s(x)$。

例 5.1.3 求解

$$\int_0^{\infty}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$$

解 由于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x}$$

上式左端为 $\varphi(t)$ 的 Fourier 正弦变换，所以 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x}$ 是未知函数 $\varphi(t)$ 的 Fourier 正弦变换，由反变换公式(5.1-10)得到

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x}\sin(tx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin(tx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\,\frac{t}{1+t^2}$$

例 5.1.4 求解在讨论弹性薄板的振动问题时所出现的下列积分方程

$$f(t)=\frac{1}{2bt}\int_0^{\infty}x\sin\frac{x^2}{4bt}\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{5.1-12}$$

式中 $\varphi(x)$ 为未知函数；$f(t)$ 为已知函数；b 为常数。

解 式(5.1-12)是一个第一类积分方程。为了把它化为可用 Fourier 正弦变换求解的形式，作变量代换：$t=\frac{1}{4b\alpha}$，$x^2=v$，则式(5.1-12)化为

$$f\left(\frac{1}{4b\alpha}\right)=\alpha\int_0^{\infty}\varphi(\sqrt{v})\sin\alpha v\mathrm{d}v$$

于是

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{1}{4b\alpha}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(\sqrt{v})\sin\alpha v\mathrm{d}v$$

求反变换，就有

$$\varphi(\sqrt{v})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{1}{4b\alpha}\right)\sin v\alpha\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{4b\alpha}\right)\sin v\alpha \mathrm{d}\alpha$$

代回原变量

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\sin\frac{x^2}{4bt}\mathrm{d}t$$

以下利用 Fourier 余弦变换讨论一个**积分区间为无穷的奇异积分方程**。

由式(5.1-9)及(5.1-11)得到

$$F_c(x) + f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [F_c(t) + f(t)]\cos(xt)\mathrm{d}t$$

这说明，对任意选取的、满足前已指出的条件的函数 $f(t)$，函数 $F_c(x)+f(x)$是积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty \varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \tag{5.1-13}$$

的、与特征值 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$对应的特征函数。由于 $f(x)$是任意函数，因此上述特征值对应的线性无关的特征函数有无限个。这是由于式(5.1-13)是一个积分区间为无穷的奇异积分方程，它的特征函数具有与 Fredholm 积分方程的特征函数不同的特性。

例 5.1.5 讨论积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty \varphi(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \tag{5.1-14}$$

的特征值与特征函数。

解 取 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(a>0)$

于是
$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\cos(xt)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}$$

因而特征值 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$对应的特征函数为

$$f(x) + F_c(x) = \mathrm{e}^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}$$

由于 a 是一个任意正实数，因此特征值$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$对应的线性无关的特征函数有无限个。

由式(5.1-9)及(5.1-11)，还可得出

$$\begin{aligned} f(x) - F_c(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [-F_c(t) + f(t)]\cos(xt)\mathrm{d}t \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [f(t) - F_c(t)]\cos(xt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

这表明$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$是方程(5.1-13)的另一特征值，仍取 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(a>0)$，可得与特征值$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$对应的线性无关的特征函数为

$$\mathrm{e}^{-ax} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \quad (a>0)$$

§ 5.2 用 Laplace 变换解积分方程

利用 Laplace 变换除了可以解第二类、第一类线性卷积型 Volterra 积分方程(组)外，还可以解非线性卷积型 Volterra 积分方程和含有卷积项的线性积分微分方程。

1. 第二类卷积型 Volterra 积分方程

第二类卷积型 Volterra 方程

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-1}$$

如果式中的 $f(x)$、$k(x)$是足够光滑的、指数阶的函数。可以证明，式(5.2-1)的解 $\varphi(x)$也是指数阶的，于是 $f(x)$、$k(x)$及 $\varphi(x)$的 Laplace 变换(在半平面 $\mathrm{Re}p>s$)存在。

设 $\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{L}\{f(x)\}=F(P)$，$\mathscr{L}\{k(x)\}=K(P)$，式(5.2-1)两端求 Laplace 变换，并利用**乘法定理**，得到

$$\Phi(P) = F(P) + K(P)\Phi(P)$$

当 $K(P)\neq 1$ 时

$$\Phi(P) = \frac{F(P)}{1-K(P)}$$

所求的解为

$$\varphi(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(P)}{1-K(P)}\right\}$$

例 5.2.1 求解

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

解 设 $\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，由于 $\mathscr{L}\{\sin x\}=\frac{1}{P^2+1}$，$\mathscr{L}\{\cos x\}=\frac{P}{P^2+1}$，方程两端对 x 求 Laplace 变换，并利用乘法定理，可得

$$\Phi(P) = \frac{1}{P^2+1} + \frac{2P}{P^2+1}\Phi(P)$$

于是

$$\Phi(P) = \frac{1}{(P-1)^2}$$

所以

$$\varphi(x) = x\mathrm{e}^x$$

2. 第一类卷积型 Volterra 积分方程

对**第一类卷积型方程**

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.2-2}$$

设 $\mathscr{L}\{k(x)\}=K(P)$，$\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{L}\{f(x)\}=F(P)$，式(5.2-2)两端求 Laplace 变换，并用乘法定理，得

$$K(P)\Phi(P) = F(P)$$

当 $K(P)\neq 0$ 时

$$\Phi(P)=\frac{F(P)}{K(P)}$$

于是 $\varphi(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(P)}{K(P)}\right\}$将是方程(5.2-2)的解。

例 5.2.2 求解

$$x^3=\int_0^x[1+4(t-x)+\frac{3}{2}(t-x)^2]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

解 原方程可记为

$$x^3=\int_0^x[1-4(x-t)+\frac{3}{2}(x-t)^2]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

上式两端求 Laplace 变换，并用乘法定理得

$$\begin{aligned}\frac{3!}{P^4}&=\frac{\Phi(P)}{P}-4\frac{1}{P^2}\Phi(P)+\frac{3}{2}\frac{2!}{P^3}\Phi(P)\\&=\left(\frac{1}{P}-\frac{4}{P^2}+\frac{2}{P^3}\right)\Phi(P)\end{aligned}$$

于是

$$\Phi(P)=\frac{6}{P}\frac{1}{(P-3)(P-1)}=\frac{3}{P}\left(\frac{1}{P-3}-\frac{1}{P-1}\right)$$

所以

$$\varphi(x)=3\left[\int_0^x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x-\int_0^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x+2$$

例 5.2.3 解 Abel 方程

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t=f(x)\tag{5.2-3}$$

解 设$\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{L}\{f(x)\}=F(P)$，对式(5.2-3)两端求 Laplace 变换，且利用乘法定理，就有

$$\Phi(P)\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{P^{-\alpha+1}}=F(P)$$

于是

$$\Phi(P)=\frac{F(P)P^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+1)}$$

由 Gamma 函数的性质 $\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+1)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$可得

$$\Phi(P)=\frac{\sin\pi\alpha\Gamma(\alpha)P^{-\alpha+1}F(P)}{\pi}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}P\Gamma(\alpha)P^{-\alpha}F(P)$$

由于$\mathscr{L}^{-1}\{\Gamma(\alpha)P^{-\alpha}\}=x^{\alpha-1}$，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{\Gamma(\alpha)P^{-\alpha}F(P)\}&=\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

从而

$$\mathscr{L}^{-1}\{P\Gamma(\alpha)P^{-\alpha}F(P)\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\right\}$$

所以

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\right\}$$

例 5.2.4 解积分方程

$$\int_0^x(x-t)^\beta\varphi(t)\mathrm{d}t=x^\lambda\tag{5.2-4}$$

式中 $\lambda \geqslant 0$，$\beta > -1$。式(5.2－4)是一类比 Abel 方程更一般的积分方程，在物理学、工程技术问题中经常出现。

解 对式(5.2－4)两端求 Laplace 变换，利用乘法定理，得到

$$\mathscr{G}\{x^{\beta}\}\mathscr{G}\{\varphi(x)\} = \mathscr{G}\{x^{\lambda}\}$$

设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\varphi(P)$，由于 $\mathscr{G}\{x^{\beta}\}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{P^{\beta+1}}$，$\mathscr{G}\{x^{\lambda}\}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{P^{\lambda+1}}$，于是

$$\Phi(P) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{P^{\lambda-\beta}}\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}$$

但
$$\mathscr{G}^{-1}\left\{\frac{1}{P^{\lambda-\beta}}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda-\beta)}x^{\lambda-\beta-1}$$

因此
$$\varphi(x) = \mathscr{G}^{-1}\{\Phi(P)\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)}x^{\lambda-\beta-1}$$

3. 非线性卷积型 Volterra 积分方程

对**非线性卷积型 Volterra 方程**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t \tag{5.2-5}$$

设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{G}\{f(x)\}=F(P)$，式(5.2－5)两端求 Laplace 变换，可得

$$\Phi(P) = F(P) + \lambda\Phi(P)\Phi(P)$$

于是
$$\lambda\Phi^2(P) - \Phi(P) + F(P) = 0$$

$$\Phi(P) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda F(P)}}{2\lambda}$$

若 $\mathscr{G}^{-1}\{\Phi(P)\}$ 存在，则它就是原方程(5.2－5)的解。

例 5.2.5 求解

$$\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{6}$$

解 设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，方程两端求 Laplace 变换，可得 $\Phi^2(P)=\frac{1}{P^4}$，于是 $\Phi(P)=\pm\frac{1}{P^2}$。所以 $\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=-x$。可见，此积分方程的解不惟一。

4. 卷积型 Volterra 积分方程组

利用 Laplace 变换还可以解下列形式的 **Volterra 积分方程组**

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t \quad (i=1,2,\cdots,s) \tag{5.2-6}$$

其中 $k_{ij}(x)$、$f_i(x)$是已知的连续函数，设它们的 Laplace 变换存在。对方程组(5.2－6)中每个方程的两端作 Laplace 变换，得到

$$\Phi_i(P) = F_i(P) + \sum_{j=1}^{s} k_{ij}(P)\Phi_j(P) \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

其中 $\Phi_i(P)=\mathscr{G}\{\varphi_i(x)\}$，$F_i(P)=\mathscr{G}\{f_i(x)\}$，$K_{ij}(P)=\mathscr{G}\{k_{ij}(x)\}$

解上列关于 $\Phi_i(P)$的线性代数方程组，得到 $\Phi_i(P)$，它们的象原函数就是积分方程组

(5.2-6)的解 $\varphi_1(x)$。

例 5.2.6 求解

$$\begin{cases}\varphi_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt - \int_0^x \varphi_2(t)dt \\ \varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t)dt + 4\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt\end{cases} \tag{5.2-7}$$

解 对式(5.2-7)的每一个方程两边求 Laplace 变换，得到

$$\begin{cases}\Phi_1(P) = \frac{1}{P} - \frac{2}{P-2}\Phi_1(P) - \frac{1}{P}\Phi_2(P) \\ \Phi_2(P) = \frac{4}{P^2} - \frac{1}{P}\Phi_1(P) + \frac{4}{P^2}\Phi_2(P)\end{cases}$$

式中 $\Phi_1(P)=\mathscr{G}\{\varphi_1(x)\}$，$\Phi_2(P)=\mathscr{G}\{\varphi_2(x)\}$。解之，得

$$\Phi_1(P) = \frac{P}{(P+1)^2} = \frac{1}{P+1} - \frac{1}{(P+1)^2}$$

$$\Phi_2(P) = \frac{3P+2}{(P-2)(P+1)^2} = \frac{8}{9}\frac{1}{P-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(P+1)^2} - \frac{8}{9}\frac{1}{P+1}$$

求反变换，得

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}$$

5. 积分微分方程

考虑含卷积项的**线性积分微分方程**

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n\varphi(x) + \sum_{j=0}^{s}\int_0^x k_j(x-t)\varphi^{(j)}(t)dt = f(x) \tag{5.2-8}$$

式中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数；$k_j(x)$，$f(x)(j=0,1,\cdots,s)$为已知函数；$\varphi(x)$为未知函数。定解条件为

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_0', \cdots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)} \tag{5.2-9}$$

解 设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{G}\{k_j(x)\}=K_j(P)$ $(j=0, 1, \cdots, s)$，$\mathscr{G}\{f(x)\}=F(P)$。方程两端求 Laplace 变换，得到

$$\Phi(P)\left[P^n + a_1P^{n-1} + \cdots + a_n + \sum_{j=0}^{s}K_j(P)P^j\right] = A(P) \tag{5.2-10}$$

其中 $A(P)$为 P 的某个已知函数。由式(5.2-10)解出 $\Phi(P)$，它的象原函数就是所要求的解。

例 5.2.7 求解

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)dt = e^{2x} \tag{5.2-11}$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \tag{5.2-12}$$

解 设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，由式(5.2-12)得

$$\mathscr{G}\{\varphi'(x)\} = P\Phi(P), \quad \mathscr{G}\{\varphi''(x)\} = P^2\Phi(P)$$

对式(5.2-11)两端求 Laplace 变换，得到

$$P^2\Phi(P)+\frac{1}{P-2}P\Phi(P)=\frac{1}{P-2}$$

解出
$$\Phi(P)=\frac{1}{P(P-1)^2}$$

因此
$$\varphi(x)=xe^x-e^x+1$$

6. 积分区间为$(x,+\infty)$的积分方程(x为正数)

在一系列物理问题中，会出现积分区间为$(x,+\infty)$的积分方程，它们亦可用 Laplace 变换求解。

设$\varphi(t)u(t-x)$的 Laplace 变换存在：$\Phi(P)=\mathscr{L}\{\varphi(t)u(t-x)\}$，则成立

$$\mathscr{L}\left\{\int_x^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\}=K(-P)\Phi(P) \tag{5.2-13}$$

式中 $K(-P)=\int_0^{+\infty}k(-x)e^{px}\mathrm{d}x$

证明
$$左端=\int_0^{+\infty}\left[\int_x^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]e^{-px}\mathrm{d}x$$

交换积分顺序得

$$左端=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t k(x-t)e^{-px}\mathrm{d}x\right]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

设$x-t=-u$，上式就化为

$$\int_0^{\infty}\left[-\int_t^0 k(-u)e^{-p(t-u)}\mathrm{d}u\right]\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\int_t^0-k(-u)e^{-pu}\mathrm{d}u\right]\varphi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t k(-u)e^{-pu}\mathrm{d}u\right]\varphi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t k(-x)e^{px}\mathrm{d}x\right]\varphi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

再交换积分顺序，得

$$左端=\int_0^{\infty}k(-x)e^{px}\left[\int_x^{\infty}\varphi(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty}k(-x)e^{px}\left[\int_0^{\infty}\varphi(t)u(t-x)e^{-pt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty}k(-x)e^{px}\mathrm{d}x\cdot\Phi(P)=K(-P)\Phi(P)$$

利用式(5.2-13)可以解下列形式的方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_x^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-14}$$

式(5.2-14)两端求 Laplace 变换，得

$$\Phi(P)=F(P)+K(-P)\Phi(P)$$

式中 $F(P)=\mathscr{L}\{f(x)\}$。

于是
$$\Phi(P)=\frac{F(P)}{1-K(-P)}\qquad(K(-P)\neq 1)$$

求反变换，得到

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{F(P)}{1-K(-P)}e^{Px}dP \qquad (s=\mathrm{Re}P) \tag{5.2-15}$$

它是方程(5.2-14)的一个特解。

需要指出，为使解(5.2-15)有意义，$K(-P)$与$F(P)$的解析区域必须重叠[4]。

例 5.2.8 求解

$$\varphi(x)=x+\int_x^{\infty}e^{2(x-t)}\varphi(t)dt \tag{5.2-16}$$

解 此时 $f(x)=x$，$k(x)=e^{2x}$

所以 $\qquad F(P)=\frac{1}{P^2}\quad K(-P)=\int_0^{\infty}e^{-2x}e^{Px}dx=\frac{1}{2-P}\qquad (\mathrm{Re}P<2)$

式(5.2-16)两端求 Laplace 变换，就有

$$\Phi(P)=\frac{1}{P^2}+\frac{1}{2-P}\Phi(P)$$

解之，得

$$\Phi(P)=\frac{P-2}{P^2(P-1)}=\frac{1}{P^2}-\frac{1}{P^2(P-1)}$$

所以 $\varphi(x)=x-x*e^x=2x+1-e^x$ 是方程(5.2-16)的特解。

方程(5.2-16)及它的齐次方程 $\varphi(x)=\int_x^{\infty}e^{2(x-t)}\varphi(t)dt$ 也可以用化为常微分方程的方法求解。

式(5.2-16)的齐次方程的通解为 C_1e^x，因此，方程(5.2-16)的解为 Ce^x+2x+1，式中 $C(C=C_1-1)$为任意常数。

7. 广义乘法定理及其应用

广义乘法定理 设 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，$\mathscr{G}\{u(x,\tau)\}=U(P)e^{-\tau q(P)}$，其中 $U(P)$与$q(P)$为 P 的解析函数，则成立

$$\mathscr{G}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(\tau)u(x,\tau)d\tau\right\}=\Phi[q(P)]\cdot U(P) \tag{5.2-17}$$

如果 $u(x,\tau)=u(x-\tau)$，$q(P)\equiv P$，则

$$\mathscr{G}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(\tau)u(x-\tau)d\tau\right\}=\Phi(P)U(P)$$

此即通常的乘法定理。式(5.2-17)可写成

$$\mathscr{G}^{-1}\{\Phi(q(P))U(P)\}=\int_0^{\infty}\varphi(\tau)u(x,\tau)d\tau \tag{5.2-18}$$

式中 $\qquad \varphi(x)=\mathscr{G}^{-1}\{\Phi(P)\},u(x,\tau)=\mathscr{G}^{-1}\{U(P)e^{-\tau q(P)}\}$

广义乘法定理常用来求反变换。

例 5.2.9 已知 $\mathscr{G}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，求 $\mathscr{G}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{P}}\Phi(\sqrt{P})\right\}$。

解 利用式(5.2-18)，取 $U(P)=\frac{1}{\sqrt{P}}$，$q(P)=\sqrt{P}$，此时

$$\mathscr{L}\{u(x,\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{P}}e^{-\tau\sqrt{P}}$$

查积分变换表，可知

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{\tau^2}{4x}}$$

由广义乘法定理(式(5.2－18))得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{P}}\Phi\left(\sqrt{P}\right)\right\} = \int_0^\infty \varphi(\tau)\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{\tau^2}{4x}}d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty \varphi(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4x}}d\tau \qquad (5.2-19)$$

式(5.2－19)本身是一个重要公式，它是广义乘法定理的一个重要特例。

例 5.2.10 求解

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}}\varphi(t)dt = 1 \qquad (5.2-20)$$

解 设 $\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，式(5.2－20)两端作 Laplace 变换，利用式(5.2－19)得到

$$\frac{\Phi\left(\sqrt{P}\right)}{\sqrt{P}} = \frac{1}{P}$$

于是

$$\frac{\Phi(P)}{P} = \frac{1}{P^2}$$

所以

$$\Phi(P) = \frac{1}{P}$$

因此 $\varphi(x)=1(x>0)$是式(5.2－20)的解。

已知 $\mathscr{L}\{x^{n/2}J_n(2\sqrt{x})\}=\frac{1}{P^{n+1}}e^{-\frac{1}{P}}(n=0,1,2,\cdots)$，其中 $J_n(u)$为 n 阶的第一类 Bessel 函数。特别，当 $n=0$ 成立 $\mathscr{L}\{J_0(2\sqrt{x})\}=\frac{1}{P}e^{-\frac{1}{P}}$，由相似定理

$$\mathscr{L}\{J_0(2\sqrt{tx})\} = \frac{1}{P}e^{-t\frac{1}{P}} \qquad (5.2-21)$$

因此在使用广义乘法定理时，显然应取 $q(P)=\frac{1}{P}$。

例 5.2.11 求解

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt \quad (|\lambda|\neq 1) \qquad (5.2-22)$$

解 设 $\mathscr{L}\{\varphi(x)\}=\Phi(P)$，式(5.2－22)两端作 Laplace 变换，利用式(5.2－21)及(5.2－17)可得

$$\Phi(P) = \frac{1}{(P+1)^2} + \lambda\frac{1}{P}\Phi\left(\frac{1}{P}\right) \qquad (5.2-23)$$

因而

$$\Phi\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{P^2}{(P+1)^2} + \lambda P\Phi(P) \qquad (5.2-24)$$

由式(5.2－23)及(5.2－24)得到

$$\Phi(P) = \frac{1}{(P+1)^2} + \frac{\lambda P}{(P+1)^2} + \lambda^2\Phi(P)$$

解之，得

$$\Phi(P) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{(P+1)^2} + \frac{\lambda P}{(P+1)^2}\right]$$

因为

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{P^2}\right\} = x$$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(P+1)^2}\right\} = xe^{-x}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P}{(P+1)^2}\right\} = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$

因此

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}[xe^{-x} + \lambda e^{-x} - \lambda xe^{-x}] = \frac{1}{1+\lambda}xe^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}e^{-x}$$

§5.3 用 Mellin 变换解积分方程

Mellin 变换是一种重要的积分变换，它在解决弹性理论及含随时间改变的变参数系统的问题中有广泛的应用，并且可用来解某些类型的积分方程。

1. Mellin 变换及其性质

设 $f(t)$在 $t>0$ 时有定义，且对适当选取的数 σ_1、σ_2 满足条件

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |f(t)|t^{\sigma_1-1}dt < +\infty \\ &\int_1^\infty |f(t)|t^{\sigma_2-1}dt < +\infty \end{aligned} \tag{5.3-1}$$

则称

$$\int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt = M(s) \qquad (s=\sigma+i\tau, \sigma_1<\sigma<\sigma_2) \tag{5.3-2}$$

为 $f(t)$的 **Mellin 变换**。

Mellin 变换的反演公式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(s)t^{-s}ds \qquad (t>0, \sigma_1<\sigma<\sigma_2) \tag{5.3-3}$$

式中积分沿平行于 s 平面上的虚轴的直线 l：$Res=\sigma$ 进行，积分在主值意义下存在。

Mellin 变换与 Fourier 变换、Laplace 变换有紧密的联系，它的许多定理，可以从 Fourier 变换、Laplace 变换相应的定理，通过变量代换得到。

性质 1 设 $M\{f(t)\}$存在且为 $F(s)$，a 为一个正常数，则 $M\{f(at)\}$存在且成立

$$M\{f(at)\} = a^{-s}M\{f(t)\} = a^{-s}F(s) \tag{5.3-4}$$

性质 2 成立

$$M\left\{x^\alpha\int_0^\infty t^\beta f(xt)g(t)dt\right\} = F(s+\alpha)G(1-s-\alpha+\beta)$$

式中 $F(s)=M\{f(x)\}$，$G(s)=M\{g(x)\}$。特别是，当 $\alpha=0$，$\beta=0$ 时

$$M\left\{\int_0^\infty f(xt)g(t)\mathrm{d}t\right\}=F(s)G(1-s) \tag{5.3-5}$$

或
$$M^{-1}\{F(s)G(1-s)\}=\int_0^\infty f(xt)g(t)\mathrm{d}t \tag{5.3-6}$$

式中 M^{-1}表示 **Mellin 变换的反变换。**

性质 3 成立

$$M\left\{\int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}=F(s)G(s) \tag{5.3-7}$$

式中 $F(s)=M\{f(x)\}$，$G(s)=M\{g(x)\}$。

2. 用 Mellin 变换解积分方程

下列形式的积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty k\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{5.3-8}$$

可以用性质 3 方便地解出

设 $\varphi(x)$、$f(x)$、$k(x)$的 Mellin 变换存在：

$M\{\varphi(x)\}=\Phi(s)$，$M\{f(x)\}=F(s)$，$M\{k(x)\}=K(s)$；$F(s)$，$K(s)$ 在公共带形区域 $\sigma_1<Res<\sigma_2$ 中解析。

式（5.3－8）两端作 Mellin 变换，利用式(5.3－7)得

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(s)$$

当 $K(s)\neq 1$ 时

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-K(s)}$$

再求反变换，即得方程(5.3－8)的解 $\varphi(x)$。

例 5.3.1 求积分方程

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-ax}+\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\ (a>0) \tag{5.3-9}$$

的解。

解 先求 e^{-ax}的 Mellin 变换，作变量代换 $z=ax$，得

$$M\{\mathrm{e}^{-ax}\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z}z^{s-1}\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(s)}{a^s}\equiv F(s) \qquad (Res>0)$$

式中 $\Gamma(s)$ 为 Gamma 函数。当 $a=1$，就有

$$M\left\{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\Gamma(s)\equiv K(s) \qquad (Res>0)$$

$F(s)$与 $K(s)$的解析区域相同。

方程(5.3－9)两端作 Mellin 变换，利用式(5.3－7)得

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{a^s}+\frac{1}{2}\Gamma(s)\Phi(s)$$

式中 $\Phi(s)=M\{\varphi(x)\}$。

因而
$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{a^s\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(s)\right]}$$

由反演公式(5.3－3)

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{1-\frac{1}{2}\Gamma(s)}\frac{ds}{(ax)^s}\quad(\sigma>0)\tag{5.3-10}$$

式(5.3－10)右端的积分可利用留数求出。

当 $ax>1$，取位于右半平面的半圆周为积分围道，此时被积函数有惟一的一阶极点 $s=3$，使 $1-\frac{1}{2}\Gamma(s)=0$。于是

$$\varphi(x)=\frac{2}{(ax^3)\psi(3)}\quad(ax>1)$$

式中 ψ (3) 为在点 $s=3$ 处 Gamma 函数的对数微商：

$$\psi(3)=\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{2}-\gamma$$

式中 γ 为 Euler 常数。

当 $ax<1$，被积函数的奇点 s_k 是 $1-\frac{1}{2}\Gamma(s)$的负根，于是

$$\varphi(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(ax)^{s_k}\psi(s_k)}\quad(ax<1)$$

式中 $\psi(s_k)$是 $\Gamma(s)$的对数微商在点 $s=s_k(k=1,2,\cdots)$的值。因此，积分方程(5.3－9)的解

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(3-2\nu)(ax)^3} & (ax>1)\\ -2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(ax)^{s_k}\psi(s_k)} & (ax<1)\end{cases}$$

利用式(5.3－6)可以求出 Fuchs 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}k(x\cdot t)\varphi(t)dt\tag{5.3-11}$$

的解。

方程(5.3－11)两端求 Mellin 变换，并利用式(5.3－6)得

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(1-s)\tag{5.3-12}$$

上式中的 s 用 $1-s$ 代替，得到

$$\Phi(1-s)=F(1-s)+K(1-s)\Phi(s)\tag{5.3-13}$$

由式(5.3－12)及(5.3－13)可得

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)[F(1-s)+K(1-s)\Phi(s)]$$

于是

$$\Phi(s)=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}\tag{5.3-14}$$

它的反变换就是 Fuchs 方程(5.3－11)的解

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}x^{-s}ds$$

例 5.3.2 求解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt\tag{5.3-15}$$

解 此方程是一个 Fuchs 方程，其中 $k(x\cdot t)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(xt)$，于是 $k(x)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$

$$K(s)=M\{k(x)\}=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty(\cos x)x^{s-1}\mathrm{d}x \tag{5.3-16}$$

再利用 Gamma 函数的定义

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{u-1}\mathrm{d}x=\Gamma(u) \tag{5.3-17}$$

来计算(式 5.3－16)。作变量代换 $x=ix_1$，则

$$x^{u-1}=i^{u-1}x_1^{u-1},\mathrm{d}x=i\mathrm{d}x_1$$

于是

$$i^{u-1}\cdot i\int_0^\infty e^{-ix_1}x_1^{u-1}\mathrm{d}x_1=\Gamma(u)$$

但 $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$。因而 $i^u=e^{\frac{\pi i}{2}u}$，从而

$$\int_0^\infty e^{-ix_1}x_1^{u-1}\mathrm{d}x_1=e^{-\frac{\pi i}{2}u}\Gamma(u)$$

因此

$$\int_0^\infty e^{-ix}x_1^{u-1}\mathrm{d}x=e^{-\frac{\pi i}{2}u}\Gamma(u)$$

两边取实部，可得

$$\int_0^\infty(\cos x)x^{u-1}\mathrm{d}x=\cos\frac{\pi u}{2}\Gamma(u) \tag{5.3-18}$$

由式(5.3－16)及(5.3－18)得

$$K(s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$$

从而

$$K(1-s)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi(1-s)}{2}$$
$$=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}$$

于是

$$K(s)K(1-s)=\frac{\lambda^2}{\pi}2\cos\frac{\pi s}{2}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\Gamma(1-s)$$
$$=\frac{\lambda^2}{\pi}\sin\pi s\cdot\Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

由 Gamma 函数的余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$，得到

$$K(s)K(1-s)=\lambda^2$$

若 $M\{F(x)\}=F(s)$，则由式(5.3－14)得

$$\Phi(s)=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-\lambda^2}$$

原方程(5.3－15)的解为

$$\varphi(x)=M^{-1}\left\{\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-\lambda^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\lambda^2}M^{-1}\{F(s)\}+\frac{1}{1-\lambda^2}M^{-1}\{K(s)F(1-s)\}$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}f(x) + \frac{1}{1-\lambda^2}M^{-1}\{K(s)F(1-s)\}$$

再由式(5.3-6)可得

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}f(x) + \frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^{\infty} k(xt)f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}f(x) + \frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^{\infty} \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos xtf(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda_2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos xt\mathrm{d}t$$

§5.4 Hankel 变换　有限 Hankel 变换

1. Hankel 变换及应用

$f(r)$的 n 阶 **Hankel 变换**定义为

$$F_n(\lambda) = H_n\{f\} = \int_0^{\infty} rJ_n(\lambda r)f(r)\mathrm{d}r \tag{5.4-1}$$

式中　$J_n(\lambda r)$为 n 阶第一类 Bessel 函数。

Hankel 变换的反变换为

$$f(r) = H^{-1}\{F_n\} = \int_0^{\infty} \lambda J_n(\lambda r)F_n(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{5.4-2}$$

用分部积分法可以证明，n 阶 Hankel 变换可以把 Bessel 微分方程化为代数方程

$$H_n\left\{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{n^2}{r^2}f\right\} = -\lambda^2 F_n(\lambda) \tag{5.4-3}$$

以下将用 Hankel 变换讨论带电圆板的电位分布问题，说明 Hankel 变换在解边值问题及导出对偶积分方程组中的应用。

讨论由 xOy 平面上的一个带电圆板形成的电场，设由单位圆盘($0\leqslant x^2+y^2<1$)上恒定电位 u_0 所产生的电位分布 $u(r,\theta,z)$是柱对称的

$$u(r,\theta,z) = u(r,z)$$

(r,θ,z)为空间点的柱坐标。且在单位圆盘外是完全绝缘的。

通常，三维空间的电位分布 $u(r,\theta,z)$满足柱坐标形式的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

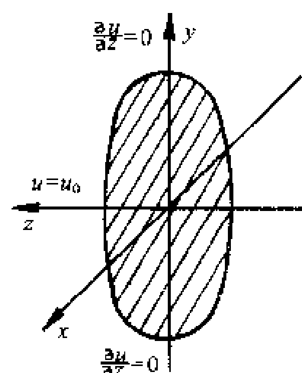


图 5·1

由于电位在圆盘是柱对称的，因此与角 θ 无关，所以 $u(r,z)$应该满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$0 < r < \infty, 0 < z < \infty \tag{5.4-4}$$

由于在单位圆盘内电位 u_0 不变，在单位圆盘外绝缘，因此混合边界条件为

$$u(r,0) = u_0 \quad (0 \leqslant r < 1) \tag{5.4-5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r,0) = 0 \quad (1 < r < \infty) \tag{5.4-6}$$

除了上述带电圆板的电位分布问题外，在讨论一个在单位圆盘内温度恒定、单位圆盘外绝热的稳态温度分布问题，及完全流体通过刚性壁上圆孔的无旋流速场问题时，都会引出上述形式的混合边值问题。

以下用 Hankel 变换求出上述带电圆板问题的解。

设

$$U(\lambda,z) = \mathscr{H}_0\{u(r,z)\}$$

式中 $\mathscr{H}_0$ 为 0 阶 Hankel 变换。

则

$$U(\lambda,z) = \int_0^\infty r\mathrm{J}_0(\lambda r)u(r,z)\mathrm{d}r \tag{5.4-7}$$

对方程(5.4 4)两端作零阶 Hankel 变换并利用式(5.4-3)($n=0$)，得

$$\lambda^2 U(\lambda,z) = \frac{\mathrm{d}^2 U(\lambda,z)}{\mathrm{d}z^2} \tag{5.4-8}$$

它的一个有界解为

$$U(\lambda,z) = A(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z} \tag{5.4-9}$$

为了求出任意函数 $A(\lambda)$，需要对象原函数 $u(r,z)$ 在 $z=0$ 的一个条件作 Hankel 变换，但是很遗憾，这个条件一部分由式(5.4-5)即 $u(r,0)=u_0$ 给出；另一部分由式(5.4-6)即 $\frac{\partial u(r,0)}{\partial z}=0$ 给出，这不符合求 Hankel 变换的要求。

$A(\lambda)$可以利用由混合边界条件(5.4-5)、(5.4-6)导出的对偶积分方程组来确定。为此，对式(5.4-9)两端作 Hankel 变换的反变换，可得象原函数

$$u(r,z) = \int_0^\infty \lambda\mathrm{J}_0(\lambda r)A(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z}\mathrm{d}\lambda \tag{5.4-10}$$

再对式(5.4-10)中的 $u(r,z)$ 用混合边界条件(5.4-5)、(5.4-6)，得到

$$u(r,0) = \int_0^\infty \lambda\mathrm{J}_0(\lambda r)A(\lambda)\mathrm{d}\lambda = u_0 \quad (0 \leqslant r < 1) \tag{5.4-11}$$

$$\frac{\partial u(r,0)}{\partial z} = \int_0^\infty -\lambda^2\mathrm{J}_0(\lambda r)A(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 0 \qquad (1 < r < \infty) \tag{5.4-12}$$

从下面关于零阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(\lambda r)$ 的两个积分公式[5]。

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\mathrm{J}_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda = \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqslant r < 1)$$

$$\int_0^\infty \sin\lambda\mathrm{J}_0(\lambda r)\mathrm{d}\lambda = 0 \quad (1 < r < \infty)$$

可看出，对偶积分方程组(5.4-11)、(5.4-12)的解为

$$A(\lambda) = \frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} \tag{5.4-13}$$

把式(5.4-13)代入式(5.4-10)，就得到带电圆板问题的解

$$u(r,z) = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{J}_0(\lambda r)\mathrm{e}^{-\lambda z}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{5.4-14}$$

2. 有限 Hankel 变换

$f(r)$在有限区间$(0,a)$的(n 阶)**有限 Hankel 变换**定义为

$$F_n(\lambda_k) = \int_0^a r\mathrm{J}_n(\lambda_k r) f(r)\mathrm{d}r \tag{5.4-15}$$

式中 $\{\lambda_k a\}$是 $\mathrm{J}_n(x)$的正零点

$$\mathrm{J}_n(\lambda_k a) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{5.4-16}$$

利用 Fourier-Bessel 级数容易看出，有限 Hankel 变换的反变换为

$$f(r) = \frac{2}{a^2}\sum_k F_n(\lambda_k)\frac{\mathrm{J}_n(\lambda_k r)}{\mathrm{J}_{n+1}^2(a\lambda_k)} \tag{5.4-17}$$

式中求和关于 $\mathrm{J}_n(x)$的零点 $a\lambda_k$ 的下标 k 进行。

参 考 文 献

1 Краснов М Л. и. др.，Интегральные уравнения，изд 2－е，Москва：М.，"Наука"，1976

2 Wolf K. B. Integral-Transforms in Science and Engineering. New York：Plenum pr.，1979

3 Jerri A. J. Introduction to Integral Equations With Applications，New York：Marcel Dekker，Inc. 1985

4 Морс. Ф. М 等. Методы Теоретической физики. 1958，Т. 1

5 Таблицы интегралов，сумм. рядов и произведений §4.4

习 题

1. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = f(x) + \frac{3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x-t|}\varphi(t)\mathrm{d}t$

式中 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ \mathrm{e}^x & (x < 0) \end{cases}$

(2) $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x-t|}\varphi(t)\mathrm{d}t \quad \left(\lambda < \frac{1}{2}\right)$

式中 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

(3) $(x) = f(x) - \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-t)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$

2. 解下列积分方程。

(1) $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0)$

(2) $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\sin xt\mathrm{d}t = f(x)$

式中 $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & (0\leqslant x\leqslant\pi) \\ 0 & (x>\pi) \end{cases}$

(3) $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos xt\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\cos x \quad (x > 0)$

(4) $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos xt\mathrm{d}t = f(x)$

式中 $f(x)=\begin{cases}\cos x & (0\leqslant x\leqslant\pi)\\ 0 & (x>\pi)\end{cases}$

3. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}$

(3) $\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(6) $\varphi(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$

(7) $\varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(8) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(9) $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(10) $\varphi(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(11) $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(12) $\varphi(x) = \sin x - \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(13) $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(14) $\varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)e^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(15) $\varphi(x) = x - \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(16) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t)\sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(17) $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\varphi(t)\mathrm{d}t$

(18) $\varphi(x) = 1 + x\cos x - \sin x + \int_0^x (x-t)\sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(19) $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$

4. 解下列积分方程。

(1) $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x\sin x$

(2) $\int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{ch}\, x - 1$

(3) $\int_0^x (x-t)\mathrm{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x$

(4) $\int_0^x (x-t)e^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2}$

(5) $\int_0^x \sqrt{x-t}\,\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2\sqrt{x}$

(6) $\int_0^x e^{x-t}\cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = xe^x$

(7) $\int_0^x (x-t)\sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin^2 x$

(8) $\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

(9) $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 2\sin^2\frac{x}{2}$

5. 解下列积分方程。

(1) $2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t = \sin x$

(2) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x$

6. 解下列积分方程组。

(1) $\begin{cases}\varphi_1(x) = -1 + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = x - \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 1 - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t + 4\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)}\varphi_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(6) $\begin{cases}\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x + \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{2x} + \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \mathrm{e}^{2(x-t)}\varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\mathrm{d}t \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

7. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} + \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} + \int_x^{\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = \cos x + \int_x^{\infty} e^{x-t}\varphi(t)dt$

(4) $\varphi(x) = 1 + \int_x^{\infty} e^{a(x-t)}\varphi(t)dt \quad (a > 0)$

8. 解下列积分方程。

(1) $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-t^2/4x}\varphi(t)dt = e^{-x}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-t^2/4x}\varphi(t)dt = 2x - \text{sh } x$

(3) $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-t^2/4x}\varphi(t)dt = x^{3/2} + e^{4x}$

9. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = e^x + \lambda\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{x}{t}} J_1(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$

(2) $\varphi(x) = \cos x + \lambda\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$

(3) $\varphi(x) = \cos x + \lambda\int_0^{\infty} \frac{x}{t} J_0(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$

(4) $\varphi(x) = \sin x + \lambda\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{x}{t}} J_1(2\sqrt{xt})\varphi(t)dt$

10. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(t)\cos xtdt$

(2) $\varphi(t) = -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(t)\cos xtdt$

(3) $\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(t)\sin xtdt$

11. 已知方程

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt + f(x)$$

的解核 $R(x,t;1)$ 是 $x-t$ 的函数 $r(x-t)$。

(1) 用 $\mathscr{L}\{k(x)\}$ 表示出 $\mathscr{L}\{r(x)\}$；

(2) 写出原积分方程解的表达式。

12. 利用 11 题解方程

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x e^{-\frac{x-t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\varphi(t)dt$$

13. 设 $\varphi(x)$ 是方程

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt + f(x)$$

的解，$a\neq 0$，试证：函数 $\varphi^*(x)=\varphi(x+a)$ 满足方程

$$\varphi^*(x) = \int_0^x k(x-t)\varphi^*(t)dt + f^*(x)$$

式中 $f^*(x) = f(x+a)$

14. 用 Mellin 变换解积分方程组

$$\begin{cases} \sigma_0(r) = \frac{1}{2\pi}E_\varphi^0|_{\varphi=0} - \frac{\sin\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho\sigma_a(\rho)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos\alpha}d\rho \\ \sigma_a(r) = -\frac{1}{2\pi}E_\varphi^0|_{\varphi=\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho\sigma_0(\rho)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos\alpha}d\rho \end{cases}$$

式中　E_0 是一个位于二面角 $0<\varphi<\alpha$ 内，具有接地导电壁的、由线电源形成的自由空间电场的场强。$(E_r^0, E_\varphi^0, 0)$ 是它的柱坐标；$\sigma_0(r)$ 与 $\sigma_\alpha(r)$ 是电荷密度。

（提示：利用 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^s \mathrm{d}t}{t^2-2t\cos\alpha+1}=\frac{\pi}{\sin\alpha}\frac{\sin(\pi-\alpha)s}{\sin\pi s}$，$-1<\mathrm{Re}\,s<1$）

15. 试证由式(5.4-14)表示的函数 $u(r,z)$ 满足混合边值问题(5.4-4)、(5.4-5)、(5.4-6)。

16. 已知 $f(r)$ 在 $(0,a)$ 上关于 n 阶第一类 Bessel 函数 $\mathrm{J}_n(\lambda_k r)$ 的 Fourier 级数为

$$f(r)=\sum_k C_k \mathrm{J}_n(\lambda_k r)$$

式中　$a\lambda_k$ 是 Bessel 函数 J_n 的第 k 个正零点，求和关于这些零点的下标 k 进行；Fourier 系数为

$$C_k=\frac{\int_0^a r\mathrm{J}_n(\lambda_k r)f(r)\mathrm{d}r}{\int_0^a r\mathrm{J}_n^2(\lambda_k r)\mathrm{d}r}$$

(1) 求上述 Fourier 系数 C_k 与式(5.4-17)中的有限 Hankel 变换 $F_n(\lambda_k)$ 的关系；

(2) 求 $f(r)=1$，$0<r<1$ 的 Fourier-Bessel 级数(即有限 Hankel 变换的反变换)。

第六章　第一类 Fredholm 方程

关于第二类 Fredholm 方程的解，已有完整的理论。但一个第一类 Fredholm 方程一般没有解，而且即使有解也不惟一，因此至今还没有建立完备的理论。本章首先叙述关于第一类对称核 Fredholm 方程的著名的 Schmidt-Picard 定理，然后介绍第一类 Fredholm 方程的逐次逼近法，给出解某些特殊的第一类 Fredholm 方程的母函数法，最后给出 Schlömilch 积分方程的求解公式。

§6.1　特征值与特征函数　退化核方程

1. 第一类 Fredholm 方程的解

考虑第一类 Fredholm 方程

$$f(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-1}$$

式中　$f(x)$是已知函数，核 $k(x,t)$是已知的实连续函数(更一般的是平方绝对可积函数)，$\varphi(x)$是未知函数。

第一类 Fredholm 方程通常没有解，即使有解，解也可能不惟一。

设核 $k(x,t)$满足线性微分方程

$$\frac{\partial^n k(x,t)}{\partial x^n}+p_1(x)\frac{\partial^{n-1}k(x,t)}{\partial x^{n-1}}+\cdots+p_n(x)k(x,t)=0 \tag{6.1-2}$$

对(6.1-1)式两端依次求出直到 n 阶的各阶导数，就可以仅当自由项 $f(x)$满足与(6.1-2)同样的微分方程时，积分方程(6.1-1)有解。

而如果 $k(x,t)$是一个**退化核**，即

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(x)b_i(t)$$

把上式代入方程(6.1-1)，可以得到，在$[a,b]$上 $f(x)$一定具有下列形式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}c_ia_i(x) \tag{6.1-3}$$

式中

$$c_i=\int_b^a b_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

当 $f(x)$不能表示为(6.1-3)那样的形式时，则积分方程(6.1-1)没有解。

例 6.1.1　讨论方程

$$\int_0^1(3x^2t+xt^2+t^3)\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin x \tag{6.1-4}$$

的可解性。

解　式(6.1-4)的左端为

$$3x^2\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t + x\int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 t^3\varphi(t)\mathrm{d}t = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

式中 $c_1 = \int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t, c_2 = \int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t, c_3 = \int_0^1 t^3\varphi(t)\mathrm{d}t$,但 c_1,c_2,c_3 无论取什么值,$c_1x^2+c_2x+c_3$ 都不会等于自由项 $\sin x$,因此积分方程 (6.1-4)无解。

例 6.1.2 讨论方程

$$\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{6.1-5}$$

解的情况。

解 为使方程(6.1-5)有解,自由项 $f(x)$必须具有形式 $f(x)=ax+b$。当 $f(x)=x$ 时,方程(6.1-5)的形式解可设为

$$\varphi_1(x) = lx + m$$

代入方程(6.1-5)可定出 $l=-6$,$m=4$,即 $\varphi_1(x)=-6x+4$,经代入验证,它确为方程(6.1-5)的解;方程(6.1-5)的形式解还可设为

$$\varphi_2(x) = px^2 + q$$

代入式(6.1-5)可确定 $p=-6$,$q=3$,于是 $\varphi_2(x)=-6x^2+3$,它也是方程(6.1-5)的解。由于(6.1-5)是一个线性方程,$\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$的线性组合 $k_1\varphi_1(x)+(1-k_1)\varphi_2(x)$也是方程(6.1-5)的解,式中 k_1 是任意实数。若 $\psi(x)$是一个与 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$线性无关的函数,且在[0,1]与 1,x 正交,即 $\int_0^1 (x+t)\psi(t)\mathrm{d}t = 0$,则 $k_1\varphi_1(x)+(1-k_1)\varphi_2(x)+k_2\psi(x)$也是方程(6.1-5)的解,式中 k_2 为任意实常数。

2. 退化核方程

方程

$$\int_a^b \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{6.1-6}$$

的核 $\sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(t)$是退化核,不失一般性,可设 $a_i(x)$;$b_i(t)(i=1,2,\cdots,N)$都是线性无关的。前面已提到,当 $f(x)$是形如式(6.1-3)的函数时,方程(6.1-6)才有解,此时可以求出以下形式的解

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k b_k(x) \tag{6.1-7}$$

式中 φ_k 是待定常数。把式(6.1-7)代入方程(6.1-6),得

$$\sum_{i=1}^N a_i(x)\sum_{k=1}^N \varphi_k\int_a^b b_i(t)b_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^N c_i a_i(x)$$

记 $b_{ik} = \int_a^b b_i(t)b_k(t)\mathrm{d}t$,由于$\{a_i(x)\}(i=1,2,\cdots,N)$线性无关,因此 φ_k 满足以下线性方程组

$$\sum_{k=1}^N b_{ik}\varphi_k = c_i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

又由于$\{b_i(t)\}(i=1,2,\cdots,N)$线性无关,因此 $\det\{b_{ik}\}\neq 0$,从而总可以解出 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,N)$,代入式(6.1-7),就可以得到方程(6.1-6)的解。但方程(6.1-6)还可能有其他形式的解。

例 6.1.3 求下述方程的解

$$\int_0^1 (x-t)e^t\varphi(t)dt = x+2 \tag{6.1-8}$$

解 方程(6.1-8)的左端

$$x\int_0^1 e^t\varphi(t)dt - \int_0^1 te^t\varphi(t)dt$$

与右端形式一致，因此可以求以下形式的解

$$\varphi(x) = \varphi_1 e^x + \varphi_2(-xe^x) = (\varphi_1 - \varphi_2 x)e^x \tag{6.1-9}$$

把它代入方程(6.1-8)，得到

$$\int_0^1 (x-t)e^t(\varphi_1 - \varphi_2 t)e^t dt = x+2$$

于是

$$\begin{cases} \int_0^1 (\varphi_1 - \varphi_2 t)e^{2t}dt = 1 \\ \int_0^1 -t(\varphi_1 - \varphi_2 t)e^{2t}dt = 2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \left(\int_0^1 e^{2t}dt\right)\varphi_1 - \left(\int_0^1 te^{2t}dt\right)\varphi_2 = 1 \\ \left(\int_0^1 te^{2t}dt\right)\varphi_1 + \left(\int_0^1 t^2e^{2t}dt\right)\varphi_2 = 2 \end{cases}$$

因此 φ_1、φ_2 满足

$$\begin{cases} \frac{e^2-1}{2}\varphi_1 - \frac{e^2+1}{4}\varphi_2 = 1 \\ -\frac{e^2+1}{4}\varphi_1 + \frac{e^2-1}{4}\varphi_2 = 2 \end{cases}$$

解之，得

$$\varphi_1 = \frac{4}{e^4 - 6e^2 + 1}(3e^2+1),\ \varphi_2 = \frac{4}{e^4 - 6e^2 + 1}(5e^2-3)$$

代入(6.1-9)式，就求得方程(6.1-8)的一个解

$$\varphi(x) = \frac{4}{e^4 - 6e^2 + 1}[(3e^2+1) - (5e^2-3)x]e^x$$

方程还存在其他形式(例如形如$(\varphi_1+\varphi_2 x+\varphi_3 x^2)e^x$)的解。

3. 第一类方程的对称化 特征值与特征函数

方程(6.1-1)的核 $k(x,t)$一般是不对称的，但可以把它的核化为对称核。由于

$$f(u) = \int_a^b k(u,t)\varphi(t)dt$$

上式两端乘以 $k(u,x)$，并对 t 从 a 到 b 积分，再交换积分顺序，就得到

$$\int_a^b k(u,x)f(u)du = \int_a^b k(u,x)\left[\int_a^b [k(u,t)\varphi(t)dt\right]du$$

$$= \int_a^b \varphi(t)\left[\int_a^b k(u,x)k(u,t)du\right]dt$$

记

$$\int_a^b k(u,x)k(u,t)du = K_1(x,t) \tag{6.1-10}$$

$$\int_a^b k(u,x)f(u)\mathrm{d}u = F(x)$$

则就有

$$\int_a^b K_*(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = F(x) \tag{6.1-11}$$

由于 $K_*(x,t)=K_*(t,x)$，因此(6.1－11)是一个对称核方程。

对于一般的第一类 Fredholm 方程(6.1－1)，如果存在某个实数 λ 及不恒为零的函数对 $\varphi(x)$、$\psi(x)$，满足以下积分方程组

$$\begin{cases}\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t & (6.1-12)\\ \psi(x) = \lambda\int_a^b k(t,x)\varphi(t)\mathrm{d}t & (6.1-13)\end{cases}$$

就称 λ 为方程(6.1－1)的特征值，$\{\varphi(x),\psi(x)\}$ 为特征值 λ 对应的**相伴特征函数对**。

4．左迭核与右迭核

从式(6.1－12)及(6.1－13)消去 $\psi(x)$，得到齐次积分方程

$$\varphi(x) = \lambda^2\int_a^b K^*(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-14}$$

式中

$$K^*(x,t) = \int_a^b k(x,u)k(t,u)\mathrm{d}u \tag{6.1-15}$$

称为核 $k(x,t)$ 的**右迭核**。

同样，从式(6.1－12)及(6.1－13)消去 $\varphi(x)$，得到

$$\psi(x) = \lambda^2\int_a^b K_*(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-16}$$

式中　$K_*(x,t)$ 由式(6.1－10)定义，称为核 $k(x,t)$ 的**左迭核**。

核 $K_*(x,t)$、$K^*(x,t)$ 均为对称半正定核。例如，对于核 $K^*(x,t)$ 来说，对任意平方(绝对)可积的函数 $p(x)$，有

$$\begin{aligned}&\int_a^b K^*(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\int_a^b p(x)p(t)\left[\int_a^b k(x,u)k(t,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,u)p(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(t,u)p(t)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b\left|\int_a^b k(x,u)p(x)\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}t \geqslant 0\end{aligned}$$

由定义 3.10.1，对称核 $K^*(x,t)$ 为半正定核。

5．利用迭核的特征函数求相伴特征函数对

不失一般性，可认为特征值 λ 都是正数。这是由于当 λ 取负数时，可取 $-\lambda$ 为特征值，这时 $\{\varphi(x),-\psi(x)\}$ 满足方程组(6.1－12)、(6.1－13)，因而是对应的相伴特征函数对。

若方程(6.1－1)的特征值为 $\{\lambda_i\}$ $(0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots)$，对应的相伴特征函数对为 $\{\varphi_i(x),\psi_i(x)\}$，则按从方程组(6.1－12)、(6.1－13)导出方程(6.1－14)及(6.1－16)同样的步骤，

可得到

$$\begin{aligned}\psi_i(x) &= \lambda_i\int_a^b k(t,x)\left[\lambda\int_a^b k(t,u)\psi_i(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\ &= \lambda_i^2\int_a^b \psi_i(u)\left[\int_a^b k(t,x)k(t,u)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u\\ &= \lambda_i^2\int_a^b K_*(x,u)\psi_i(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

同样，可得到

$$\varphi_i(x) = \lambda_i^2\int_a^b K^*(x,u)\varphi_i(u)\mathrm{d}u$$

于是 λ_i^2 是 $K^*(x,t)$、$K_*(x,t)$共同的特征值，$\varphi_i(x)$、$\psi_i(x)$分别是这两个核对应的特征函数。

由于对称核 $K^*(x,t)$、$K_*(x,t)$为半正定核，由定理 3.1.1 及定理 3.10.3，它们的特征值存在且所有特征值都是正的。

反过来，若 c 是以上两个核之一（例如 $K^*(x,t)$）的特征值，此时 c 恒为正数。设 $\varphi(x)$是对应的特征函数，再设

$$\psi(x) = \sqrt{c}\int_a^b k(t,x)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-17}$$

式（6.1－17）连同

$$\varphi(x) = c\int_a^b K^*(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-18}$$

很容易化回方程(6.1－12)、(6.1－13)，其中 $\lambda=\sqrt{c}$。因此求方程组(6.1－12)、(6.1－13)的全部解，与求对称核 $K^*(x,t)$、$K_*(x,t)$之一的特征值与特征函数是一回事。

由于所有这些特征值是正的，因此可以用 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots$来表示（且约定 $\lambda_i>0$）。设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_i(x),\cdots$为由核 $K^*(x,t)$的特征函数构成的标准正交系，则当 $\lambda=\lambda_i$ 时，由式(6.1－13)可得到与 $\varphi_i(x)$ 对应的、核 $K_*(x,t)$关于同一特征值 λ_i^2 的特征函数 $\psi_i(x)$，$\{\psi_i(x)\}$亦构成一个标准正交系，这是因为，从式(6.1－17)及(6.1－18)可得到

$$\psi_i(x) = \lambda_i\int_a^b k(t,x)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-19}$$

$$\psi_k(x) = \lambda_k\int_a^b k(u,x)\varphi_k(u)\mathrm{d}u \tag{6.1-20}$$

再利用式(6.1－15)及(6.1－14)就有

$$\varphi_i(x) = \lambda_i\int_a^b k(x,t)\psi_i(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-21}$$

而

$$\begin{aligned}&\int_a^b \psi_i(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x\\ &= \lambda_i\lambda_k\int_a^b\int_a^b\int_a^b k(t,x)k(u,x)\varphi_i(t)\varphi_k(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\ &= \lambda_i\lambda_k\int_a^b\int_a^b K^*(t,u)\varphi_k(u)\varphi_i(t)\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\ &= \lambda_i\lambda_k\int_a^b\left[\int_a^b K^*(t,u)\varphi_k(u)\mathrm{d}u\right]\varphi_i(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = \begin{cases}0 & i \neq k \\ 1 & i = k\end{cases} \tag{6.1-22}$$

6. 迭核 K^*、K_* 关于同一特征值的秩

设迭核 $K_*(x,t)$、$K^*(x,t)$的同一特征值 λ_i^2 所对立的特征函数分别为 $\varphi_i^{(1)}(x)$，$\varphi_i^{(2)}(x)$，$\cdots$，$\varphi_i^{(r_1)}(x)$；$\psi_i^{(1)}(x)$，$\psi_i^{(2)}(x)$，$\cdots$，$\psi_i^{(r_2)}(x)$。即 $K_*(x,t)$、$K^*(x,t)$关于特征值 λ_i^2 的秩分别为 r_1 与 r_2。以下证明 $r_1=r_2$。

由式(6.1-22)，对于核 $K_*(x,t)$ 与 λ_i^2 对应的正交的特征函数系$\{\varphi_i^{(m)}\}(m=1,2,\cdots,r_1)$，由(6.1-20)得到 $K^*(x,t)$的特征函数系$\{\psi_i^{(n)}(x)\}(n=1,2,\cdots,r_2)$也是正交的，从而是线性无关的，因此核 $K^*(x,t)$的特征值 λ_i^2 的秩 r_2 不小于 $K_*(x,t)$的同一特征值的秩 r_1。同理可证 $K_*(x,t)$的特征值 λ_i^2 的秩 r_1 不小于 $K^*(x,t)$的同一特征值的秩 r_2。因此，核 $K^*(x,t)$与 $K_*(x,t)$关于同一特征值 λ_i^2 的秩相等。

7. 实对称核的特征值

当 $k(x,t)$为实对称核时，由式(6.1-10)及(6.1-15)可知 $K^*(x,t)=K^*(x,t)$。再由式(6.1-14)与(6.1-16)可知，$\varphi(x)$与 $\psi(x)$满足相同的积分方程。这时方程组(6.1-12)、(6.1-13)化为方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.1-23}$$

因此，在此时，特征值与特征函数的定义与第二类 Fredholm 方程特征值特征函数的定义一致。由于一般的第一类 Fredholm 方程可解性的讨论比较复杂，而一般核的第一类 Fredholm 方程可以化为对称核的第一类 Fredholm 方程，因此以后只需讨论对称核的第一类 Fredholm 方程

§6.2 Schmidt-Picard 定理

设对称核第一类 Fredholm 方程的核 $k(x,t)$、自由项 $f(x)$、未知函数 $\varphi(x)$在所在区域平方可积。在一定条件下，它的解可用按核的特征函数展开的方法求出，即设它的解存在，且可表示为标准正交的特征函数系$\{\varphi_i(x)\}$的级数

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$$

式中 a_i 是 $\varphi(x)$关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 系数，即

$$a_i = \int \varphi(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \tag{6.2-1}$$

再把对称核 $k(x,t)$的展开式(3.2-2)

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(t)$$

代入方程(6.1-1)

$$f(x) = \int_a^b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

上式两端乘以 $\varphi_i(x)$ 再关于 x 从 a 到 b 积分，得到

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\left\{\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\int_a^b \varphi_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\}$$

设

$$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \tag{6.2-2}$$

由 $\{\varphi_i(x)\}$ 的标准正交性及式(6.2－2)

$$f_i = \frac{1}{\lambda_i}a_i, \text{即 } a_i = \lambda_i f_i$$

于是得到方程(6.1－1)的解

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i \varphi_i(x) \tag{6.2-3}$$

Schmidt 证明了级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 f_i^2$ 收敛是方程(6.1－1)可解的必要条件。后来 Picard 又证明了，在标准正交系 $\{\varphi_i(x)\}$ 完备的假设下，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 f_i^2$ 收敛也是方程(6.1－1)存在惟一解的充分条件。对于第一类 Fredhlm 方程(6.1－1)，成立

定理 6.2.1 (Schmidt-Picard 定理)若方程(6.1－1)满足下列条件：

i) $k(x,t)$ 是对称核；

ii) 级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 f_i^2 \tag{6.2-4}$$

收敛，式中 f_i 是核 $k(x,t)$ 的特征值，$f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x$，$\{\varphi_i(x)\}(i=1,2,\cdots)$ 是与 λ 对应的、核 $k(x,t)$ 的标准正交的特征函数；

iii) 特征函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 在 $[a,b]$ 是完备的。

则方程(6.1－1)的解存在，且在平方可积函数类中解是惟一的，可以表示为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i \varphi_i(x) \tag{6.2-5}$$

式(6.2－5)右端的级数平均收敛于解 $\varphi(x)$。

函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 完备是指，对属于平方可积函数类的 $f(x)$，Parseval 等式 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$ 成立，式中 $f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x$。

对 $k(x,t)$ 是一般核(不一定为对称核)的第一类 Fredholm 方程(6.1－1)，在 $k(x,t)$ 的特征函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 完备的假设下，它存在惟一的、平方可积解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2\lambda_i^2$ 收敛，并且 $f(x)$ 可以展开为一致收敛的级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i\varphi_i(x)$。如果这些条件成立，则方程(6.1－1)的解可以表示为式(6.2－5)，而式(6.2－5)右端的级数平均收敛于解 $\varphi(x)$。

例 6.2.1 解方程

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin^3\pi x \tag{6.2-6}$$

式中

$$k(x,t) = \begin{cases} (1-x)t & (0 \leqslant t \leqslant x) \\ x(1-t) & (x \leqslant t \leqslant 1) \end{cases} \tag{6.2-7}$$

解 核(6.2－7)是实对称核，先求出它的特征值与特征函数

$$\lambda_1 = \pi^2, \lambda_2 = (2\pi)^2, \cdots, \lambda_n = (n\pi)^2, \cdots$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{2}\sin \pi x, \varphi_2(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi x, \cdots, \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x, \cdots \tag{6.2-8}$$

由三角公式，式(6.2－6)的右端

$$\sin^3\pi x = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x = \frac{3}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}\sin \pi x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}\sin 3\pi x)$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}\varphi_1(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\varphi_3(x)$$

所以 $f(x)=\sin^3\pi x$ 关于标准正交函数系(6.2－8)的展开式的系数

$$f_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}}, f_2 = 0, f_3 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, f_k = 0 \quad (k = 4,5,\cdots)$$

级数(6.2－4)现在是有限和

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 f_i^2 = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2(\pi^2)^2 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2(3^2\pi^2)^2 = \frac{45}{16}\pi^4$$

当然是收敛的。而特征函级系(6.2－8)是[0,1]上标准正交的完备组。综上所述，满足 Schmidt-Picard 定理的条件，因此方程(6.2－6)有惟一解

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1\varphi_1(x) + \lambda_3 f_3\varphi_3(x) = \frac{3\pi^2}{4}(\sin \pi x - 3\sin 3\pi x) \tag{6.2-9}$$

直接代入方程(6.2－6)验证可知，式(6.2－9)确是方程(6.2－6)的解

在 Schmidt-Picard 定理中，特征函数系完备性是关键的一个条件，没有它就不能保证方程解的惟一性。

例 6.2.2 讨论下述方程解的惟一性：

$$\int_0^1 (x-3t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 2x - 3 \tag{6.2-10}$$

解 先求出核 $x-3t$ 的特征值－2、对应的特征函数$\frac{x-1}{\sqrt{3}}$。特征函数系仅由一个函数$\frac{x-1}{\sqrt{3}}$组成，它在[0,1]上是不完备的，因此不能肯定方程(6.2－10)的解惟一。

事实上，只要 a、b、c 满足以下两个条件：$a+b=0$，$b+6c=12$，任何形如 ax^2+bx+c 的二次三项式都是方程(6.2－10)的解，因此它的解是不惟一的。

§6.3 逐次逼近法

实对称核的第一类 Fredholm 方程，也可以用逐次逼近法求解，但与第二类 Fredholm 方程的逐次逼近法相比，要求的条件强得多，此外，逐次逼近法只有在预先能肯定方程解存在的条件下才能进行，而第二类 Fredholm 方程可以利用逐次逼近法断定解的存在。以下介绍第一类 Fredholm 方程的两种逐次逼近法。

1. 实对称核第一类方程的一种逐次逼近法

实对称核方程

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{6.3-1}$$

可记为 $K\{\varphi\}=f(x)$，式中 $k(x,t)=k(t,x)$。

取任意可积函数 $\psi_0(x)$作为零次近似，则可按迭代公式

$$\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x) = f(x) - K\{\psi_{n-1}(x)\}$$

即

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x) + f(x) - K\{\psi_{n-1}(x)\} \tag{6.3-2}$$

依次求出 $\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x),\cdots$。在一定的条件下，$\{\psi_n(x)\}$的极限函数就是积分方程(6.3-1)的解，成立

定理 6.3.1 如果第一类方程(6.3-1)的解 $\varphi(x)$存在，则当且仅当它的特征函数系$\{\varphi_n(x)\}$关于 $f(x)$完备时，$\{\varphi_n(x)\}$平均收敛于解 $\varphi(x)$。特别是，如果 $f(x)$可以表示为

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t$$

式中 $h(t)$是$[a,b]$上任一平方可积的函数，则$\{\psi_n(x)\}$一致收敛于方程的解 $\varphi(x)$。此时要求取零次近似为

$$\psi_0(x) = \int_a^b k(x,t)h_0(t)\mathrm{d}t$$

式中 $h_0(t)$也是任意平方可积的函数。

定理 6.3.1 的证明比较复杂，可参阅陈传璋等著《积分方程论及与应用》第五章§3。

2. 实对称正定核第一类方程的逐次逼近法

当核为实对称的正定核时，可以按下列方式用逐次逼近法求积分方程的解，成立以下定理。

定理 6.3.2 已知核 $k(x,t)$是实对称的正定核，$f(x)$为平方可积函数，如果方程(6.3-1)的解 $\varphi(x)$存在，则由

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x) + \lambda\left[f(x) - \int_a^b k(x,t)\psi_{n-1}(t)\mathrm{d}t\right] \tag{6.3-3}$$

确定的序列$\{\psi_n(x)\}$平均收敛于方程(6.3-1)的解 $\varphi(x)$。$\psi_0(x)$是任一在$[a,b]$上平方可积的函数，而 λ 满足 $0<\lambda<2\lambda_1$，其中 λ_1 是核 $k(x,t)$是第一特征值。

证明 式(6.3-3)可记为

$$\psi_n(x) = \varphi(x) + u_n(x)$$

于是

$$\psi_{n-1}(x) = \varphi(x) + u_{n-1}(x) \tag{6.3-4}$$

因此

$$\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$$

再由式(6.3-3)

$$\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x) = \lambda\left[f(x) - \int_a^b k(x,t)\psi_{n-1}(t)\mathrm{d}t\right]$$

从而
$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = \lambda\left[f(x) - \int_a^b k(x,t)\psi_{n-1}(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$= \lambda\int_a^b k(x,t)[\varphi(t) - \psi_{n-1}(t)]\mathrm{d}t$$
再由式(6.3-4)
$$u_n(x) - u_{n-1}(x) = -\lambda\int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)\mathrm{d}t$$
即
$$u_n(x) = u_{n-1}(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)\mathrm{d}t \tag{6.3-5}$$
式(6.3-5)两端乘上$k(x,t)$的特征函数$\varphi_i(x)$，并关于x从a到b积分，得
$$a_{i,n} = a_{i,n-1} - \lambda\int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)\mathrm{d}t \tag{6.3-6}$$
式中
$$a_{i,n} = \int_a^b u_n(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \tag{6.3-7}$$
由假设，核$k(x,t)$是对称的，所以$\varphi_i(x)$满足方程
$$\varphi_i(x) - \lambda_i\int_a^b k(t,x)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{6.3-8}$$
式(6.3-6)右端的积分交换积分顺序．利用$\varphi_i(x)$是特征函数及式(6.3-8)、(6.3-7)，得
$$\lambda\int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{d}x\int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)\mathrm{d}t$$
$$= \lambda\int_a^b u_{n-1}(t)\mathrm{d}t\int_a^b k(x,t)\varphi_i(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda_i}\int_a^b u_{n-1}(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda_i}a_{i,n-1}$$
从式(6.3-6)得到
$$a_{i,n} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)a_{i,n-1} = \cdots = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n a_{i,0} \tag{6.3-9}$$
由定理 3.10.4 及注，特征函数系$\{\varphi_i(x)\}$是完备的，因此 Parseval 等式
$$\int_a^b u_n^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,n}^2 \tag{6.3-10}$$
对一切$n(n=0,1,\cdots)$成立．由假设
$$0 < \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2 < 1 \tag{6.3-11}$$
因而正项级数
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n} a_{i,0}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,0}^2$$
收敛，但上式右端的级数与n无关，因此对任意正数$\varepsilon>0$，存在与n无关的$N_1(\varepsilon)>0$，使得当$j>N_1(\varepsilon)$时，成立
$$\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,n}^2 \leqslant \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,0}^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3-12}$$
固定j，对级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,n}^2$的前$j-1$项利用不等式(6.3-11)，就可得到：对上述的$\varepsilon>0$，存在

$N_2(\varepsilon)>0$,使得当 $n>N_2(\varepsilon)$时，成立

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n} a_{i,0}^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3-13}$$

考虑到不等式(6.3-12)及式(6.3-13),(6.3-10)就得到

$$\int_a^b u_n^2(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$$

这说明，由式(6.3-3)构造的近似解序列$\{\psi_n(x)\}$平均收敛于方程(6.3-1)的解 $\varphi(x)$。

例 6.3.1 用逐次逼近法解方程

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin \pi x \tag{6.3-14}$$

式中

$$k(x,t) = \begin{cases}(1-x)t & (0\leqslant t\leqslant x)\\ (1-t)x & (x\leqslant t\leqslant 1)\end{cases} \tag{6.3-15}$$

解 核的第一特征值 $\lambda_1=\pi^2$，按式(6.3-3)构造逐次逼近叙列$\{\psi_n(x)\}$。零次近似取为 $\psi_0(x)=0$,而 λ 取为 $1<2\lambda_1=2\pi^2$。于是有

$$\psi_1(x) = \sin \pi x$$

$$\psi_2(x) = \sin \pi x\left[1+\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)\right]$$

$$\psi_3(x) = \sin \pi x\left[1+\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)+\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^2\right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \sin \pi x\left[1+\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^{n-1}\right]\\ &= \pi^2\left[1-\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^n\right]\sin \pi x\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = \pi^2\sin \pi x$$

经直接代入验证，$\pi^2\sin x$ 确为方程(6.3-14)的解，由定理 6.3.2，方程(6.3-14)的解存在且惟一。

§6.4 母函数法

某些特殊的，在实际中有重要应用的第一类 Fredholm 方程，可以用母函数方法求解。只要区间恰当，方程的核是某函数系(通常由特殊函数构成)的母函数，就可以用这种方法解积分方程。

对于函数系

$$g_0(t),g_1(t),\cdots,g_n(t),\cdots \tag{6.4-1}$$

如果成立

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t)x^n \tag{6.4-2}$$

式中 c_n 为常数，则称函数 $G(x,t)$ 为函数系 $\{g_n(t)\}$ 的**母函数**。

方程

$$\int_a^b k(x,t)\rho(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{6.4-3}$$

称为**带权 ρ(x) 的第一类 Fredholm 方程**。

当方程(6.4-3)的核 $k(x,t)$ 是区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 为正交的实函数系 $\{g_n(t)\}$ 的母函数，即

$$k(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t) x^n \tag{6.4-4}$$

而自由项 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域解析，则可寻求方程(6.4-3)形如

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x) \tag{6.4-5}$$

的解，式中 a_k 为未知常数，它可以用 c_k 表出。只要把式(6.4-4)、(6.4-5)代入方程(6.4-3)，并利用 $\{g_k(t)\}$ 的正交性，就得到

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(t) x^n \rho(t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \| g_k(t) \|^2 a_k x^k = f(x) \tag{6.4-6}$$

式中 $\| g_k(t) \| = \int_a^b g_k^2(t)\rho(t)\mathrm{d}t$

把 $f(x)$ 在 $x=0$ 展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

由式(6.4-6)得到

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!c_k \| g_k(t) \|^2}$$

把上式代入式(6.4-5)式的右端，就得到方程(6.4-3)的解。当函数系 $\{g_k(x)\}$ 完备时，方程的解是惟一的。

表 6-1 列出(奇性)核与对应的母函数，以满足解第一类 Fredholm(奇性核)积分方程的需要。

表 6-1　奇性核与母函数表

$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \quad (-1<x,t<1)$ 式中 $P_n(t)$ 为 Legendre 多项式，$\| P_n(t) \|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}$
$\frac{1-xt}{1-xt+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)x^n \quad (-1<x,t<1)$ 式中 $T_n(t)$ 为第一类 Chebyshev 多项式，权为 $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，$\| T_n(t) \|^2 = \frac{\pi}{2}$
$1-\frac{1}{2}\ln\|1-2xt+t^2\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} T_n(t)x^n$， $(-1<x,t<1)$ 式中 $T_n(t)$ 为第一类 Chebyshev 多项式，权为 $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，$\| T_n(t) \|^2 = \frac{\pi}{2}$

续表

$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n(t)x^n \qquad (-1<x,t<1)$ 式中 $U_n(t)$为第二类 Chebyshev 多项式，权为$\sqrt{1-t^2}$，$\|U_n(t)\|^2=\frac{\pi}{2}$
$e^{-(x-t)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{n!}H_n(t)x^n, \qquad (-\infty<x,t<\infty)$ 式中 $H_n(t)$为 Hermite 多项式，权为e^{-t^2}，$\|H_n(t)\|^2=2^n\cdot n!\sqrt{\pi}$
$\frac{J_\alpha(2\sqrt{xt})}{(xt)^{\alpha/2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^{(\alpha)}(t)e^{-x}x^n, 0<x,t<\infty, \alpha>-1$ 式中 $L_n^{(\alpha)}(t)$为一般 Laguerre 多项式，权为$e^{-t}t^\alpha$，$\|L_n^{(\alpha)}(t)\|^2=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$
$\frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{(1-x)^{\alpha+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(t)x^n \quad \|x\|<1, 0<t<\infty, \alpha>-1$ 式中 $L_n^{(\alpha)}(t)$为一般 Laguerre 多项式，权为$e^{-t}t^\alpha$，$\|L_n^{(\alpha)}(t)\|^2=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$
$\frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(t)x^n \quad 0<t<\infty \quad -1<x<1$ 式中 $L_n(t)$为 Laguerre 多项式，权为e^{-t}，$\|L_n(t)\|^2=1$

例 6.4.1 求下列方程的解：

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2-2xt}}=x+1 \tag{6.4-7}$$

解 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}$是 legendre 多项式的母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)x^n \tag{6.4-8}$$

设方程(6.4-7)的解为

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kP_k(x) \tag{6.4-9}$$

把式(6.4-8)、(6.4-9)代入方程(6.4-7)，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2a_n}{2n+1}x^n=x+1$$

于是 $a_0=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{3}{2}$，$a_n=0(n=2,3,\cdots)$。因此方程(6.4-7)的解为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{2}P_1(x)=\frac{1}{2}\cdot1+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}(1+3x)$$

例 6.4.2 求下列方程的解：

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}e^{-t}\varphi(t)\mathrm{d}t=1-x \qquad (|x|<1) \tag{6.4-10}$$

解 $\dfrac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}$是 Laguerre 多项式 $L_n(t)$的母函数

$$\frac{e^{\frac{-xt}{1-x}}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)x^n \tag{6.4-11}$$

设式(6.4-10)的解为

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kL_k(x) \tag{6.4-12}$$

把式(6.4-11)，(6.4-12)代入方程(6.4-10)，得

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-t}L_n(t)x^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_kL_k(t)dt=1-x$$

由于 $L_n(t)$在$(0,\infty)$关于权 e^{-t}为正交，并且

$$\|L_n(t)\|^2=\int_0^{\infty}e^{-t}L_n^2(t)dt=(n!)^2$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^2x^na_n=1-x \tag{6.4-13}$$

比较式(6.4-13)两端 x 同次幂的系数，得到

$$a_0=1,a_1=-1,a_n=0(n=2,3,\cdots)$$

因此方程(6.4-10)的解

$$\varphi(x)=1\cdot L_0(x)+(-1)L_1(x)=1-(1-x)=x$$

§6.5 Schlömilch 积分方程

形如

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\sin\theta)d\theta \tag{6.5-1}$$

的方程，称为**Schlömilch 方程**，它是一种特殊的第一类 Fredholm 方程，在弹性力学中有广泛的应用。利用交换积分顺序及换元法，可以证明下面的定理。

定理 6.5.1 若自由项 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$有连续导数，则 Schlömilch 方程(6.5-1)在$[-\pi,\pi]$有惟一的连续解

$$\varphi(x)=f(x)+x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x\sin\theta)d\theta$$

证明 由式(6.5-1)

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(0)d\theta=\varphi(0) \tag{6.5-2}$$

式(6.5-1)两端关于 x 求导，得

$$f'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

于是

$$f'(x\sin\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin\psi\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

上式两端乘以 x，再关于 ψ 从 0 到$\frac{\pi}{2}$积分并交换积分顺序

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin\psi\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\psi$$

$$= \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin\psi\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\psi\right]\mathrm{d}\theta \qquad (6.5-3)$$

引进新变量 u

$$\sin u = \sin\theta\sin\psi \qquad (6.5-4)$$

于是
$$\cos u\mathrm{d}u = \sin\theta\cos\psi\mathrm{d}\psi$$

即
$$\frac{\cos u}{\cos\psi}\mathrm{d}u = \sin\theta\mathrm{d}\psi$$

当 $\psi=0$ 时，$\sin u=0$，即 $u=0$；当 $\psi=\frac{\pi}{2}$时，$\sin u=\sin\theta$，即 $u=\theta$。式(6.5-3)成为

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\theta}\varphi'(x\sin u)\frac{\cos u}{\cos\psi}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\theta \qquad (6.5-5)$$

由式(6.5-4)

$$\sin\psi = \frac{\sin u}{\sin\theta}$$

于是

$$\frac{1}{\cos\psi} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\psi}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\psi}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\psi-\cos^2\theta}} \qquad (6.5-6)$$

把式(6.5-6)代入式(6.5-5)的右端，交换积分顺序，得

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin u)\cos u\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\psi-\cos^2\theta}}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi'(x\sin u)\cos u\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\psi-\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}u$$

对 $\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\psi-\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta$,设$\frac{\cos\theta}{\cos\psi}=\omega$，得

$$\int_u^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\psi-\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta = \int_1^0\frac{-\cos\psi\mathrm{d}\omega}{\cos\psi\sqrt{1-\omega^2}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

所以
$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = \frac{2x}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin u)\cos u\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin u)\mathrm{d}(x\sin u)$$

$$= \varphi(x\sin u)\Big|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = \varphi(x) - \varphi(0)$$

再由式(6.5-2)

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = \varphi(x) - f(0)$$

因此
$$\varphi(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\mathrm{d}\psi = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

参 考 文 献

1 陈传璋等著. 积分方程论及其应用，第1版. 上海：上海科学技术出版社，1987

2 Краснов М. Л. и др.，Интегральные уравнения，Изд 2-е，Москва：Наука，1976

习 题

1. 讨论下列方程的可解性

(1) $\int_0^{2\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \pi\cos x$

(2) $\int_0^{\pi}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 3\sin x - \sin 3x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t(\pi-x)}{\pi} & (0\leqslant t\leqslant x)\\ \dfrac{x(\pi-t)}{\pi} & (x\leqslant t\leqslant \pi)\end{cases}$

(3) $\int_0^1(3x-2)t\varphi(t)\mathrm{d}t = x^2+3x-1$

2. 用母函数法解下列积分方程。

(1) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1-x}e^{-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = 2-x^2$

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^2-2xt}} = 2x^3-2x$

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+x^2-2xt}}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}$

3. 解下列积分方程。

(1) $1+x^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\varphi(x\sin 3\theta)\mathrm{d}\theta$

(2) $1+x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$

(3) $3x^2+2x^3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

4. 用逐次逼近法解下列积分方程。

(1) $\int_0^{\pi}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin 2x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t(\pi-x)}{\pi} & (0\leqslant t\leqslant x)\\ \dfrac{x(\pi-t)}{\pi} & (x\leqslant t\leqslant \pi)\end{cases}$

（提示：取 $\varphi_0(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$）

(2) $\int_0^1k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\cos 3x$

式中 $k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x^2+t^2}{2}+\dfrac{1}{3}-x & (0\leqslant t\leqslant x)\\ \dfrac{x^2+t^2}{2}+\dfrac{1}{3}-t & (x\leqslant t\leqslant 1)\end{cases}$

（提示：取$(x)=\cos 3\pi x$）

第七章　积分方程的近似解法

实际中遇到的积分方程，大部分不能或难以求出它的精确解析解，但在大多数情况下，可以求出它的近似解。本章主要介绍求积分方程近似解的实用、简便、行之有效的方法。

积分方程的近似解法，大致可以归为两类：一类是化为便于进行数值计算的其他类型的问题，例如核用退化核近似代替、用数值积分公式把积分方程化为代数方程组、把积分方程化为变分问题求数值解、待定系数法等；另一类是对以前讨论过的解析解法作近似计算，例如逐次逼近法、利用递推公式(2.3－15)与(2.3－9)由式(2.3－4)及(2.3－6)求出 $D(\lambda)$、$D(x,t;\lambda)$的近似表达式，从而求出第二类 Fredholm 方程的近似解等。

本章主要对线性积分方程的近似解法作简要的叙述，在本章最后介绍特征值近似值的求法。

对于非线性积分方程与奇异积分方程来说，数值解法显得更为重要。关于非线性积分方程的近似解法，在第九章中作介绍。

§7.1　用退化核近似任意核

考虑任意核的第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.1-1}$$

由于求退化核方程的解比较简单，很自然地想到，把已知的任意核 $k(x,t)$ 用与它接近的退化核 $l(x,t)$ 代替，再把代替后的退化核方程

$$\tilde{\varphi}(x)=\lambda\int_a^b l(x,t)\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t+f(x)$$

的解 $\tilde{\varphi}(x)$ 作为原方程（7.1－1）的近似解。

可以取 $k(x,t)$的 Taylor 级数的部分和，或 $k(x,t)$关于 $L_2(a,b)$中任何完备的标准正交函数系$\{u_i(x)\}$的 Fourier 级数的部分和等，作为接近于已知核 $k(x,t)$的退化核 $l(x,t)$。

下面给出，用退化核代替已知核所引起解的误差的估计。

定理 7.1.1　设对于核 $k(x,t)$、$l(x,t)$有

$$\int_a^b|k(x,t)-l(x,t)|\mathrm{d}t<h \tag{7.1-2}$$

而对于以 $l(x,t)$为核之方程的解核 $R_l(x,t;\lambda)$，成立

$$\int_a^b|R_l(x,t;\lambda)|\mathrm{d}t<R \tag{7.1-3}$$

此外还有

$$|f(x)-f_1(x)|<\eta \tag{7.1-4}$$

如果 h 取得足够小，总可以使不等式

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|R)>0 \tag{7.1-5}$$

成立，则方程(7.1－1)有惟一解 $\varphi(x)$，而此解与方程

$$\tilde{\varphi}(x)=\lambda\int_a^b l(x,t)\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t+f_1(x) \tag{7.1-6}$$

之解 $\tilde{\varphi}(x)$的差的绝对值，满足

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{B|\lambda|(1+|\lambda|R)^2h}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|R)}+\eta(1+|\lambda|R) \tag{7.1-7}$$

式中 B是$|f(x)|$的一个上界。

证明 设 $|\varphi(x)|\leqslant M$ (7.1－8)

及 $|\tilde{\varphi}(x)|\leqslant\tilde{M}$，由式(7.1－1)

$$\begin{aligned}&\varphi(x)-\lambda\int_a^b l(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)-\lambda\int_a^b l(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=\lambda\int_a^b[k(x,t)-l(x,t)]\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x)=f^*(x)\end{aligned} \tag{7.1-9}$$

即

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b l(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f^*(x) \tag{7.1-10}$$

由式(7.1－9)

$$\begin{aligned}|f^*(x)|&\leqslant|f(x)|+|\lambda|\int_a^b|k(x,t)-l(x,t)|\varphi(t)\mathrm{d}t\\&<B+M|\lambda|h\end{aligned}$$

式(7.1－10)的解可用解核 $R_l(x,t;\lambda)$表出

$$\varphi(x)=f^*(x)+\lambda\int_a^b R_l(x,t;\lambda)f^*(t)\mathrm{d}t$$

于是由式(7.1－3)

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&=|f^*(x)+\lambda\int_a^b R_l(x,t;\lambda)f^*(t)\mathrm{d}t|\\&<B+M|\lambda|h+|\lambda|R[B+M|\lambda|h]\end{aligned}$$

因此 $M<B+M|\lambda|h+|\lambda|R[B+M|\lambda|h]$

如果成立

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|R)>0 \tag{7.1-5}$$

则由上式可得

$$M<\frac{B(1+|\lambda|R)}{1-h|\lambda|(1+|\lambda|R)} \tag{7.1-11}$$

于是当条件(7.1－11)满足时，方程(7.1－1)的所有解都是有界的，因此方程(7.1－1)有惟一解，且 λ 不是方程(7.1－1)的特征值。

设 $\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)=\psi(x)$，把式(7.1－10)与式(7.1－4)两端分别相减，就得到 $\psi(x)$满足的方程

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b l(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t=f^*(x)-f_l(x) \tag{7.1-12}$$

而由式(7.1-9)、(7.1-2)、(7.1-8)、(7.1-4)

$$|f^*(x) - f_l(x)| \leqslant |f^*(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leqslant |\lambda| Mh + \eta$$

方程(7.1-12)的解

$$\varphi(x) = f^*(x) - f_l(x) + \lambda\int_a^b R_l(x,t;\lambda)[f^*(t) - f_l(t)]\mathrm{d}t$$

于是由式(7.1-3)

$$|\psi(x)| = \left|f^*(x) - f_l(x) + \lambda\int_a^b R_l(x,t;\lambda)[f^*(t) - f_l(t)]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant |\lambda|Mh + \eta + |\lambda|R(|\lambda|Mh + \eta) = (|\lambda|Mh + \eta)(1 + |\lambda|R)$$

把 M 的一个上界(7.1-11)代入上式，就得到估计式(7.1-7)。

对于退化核 $l(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t)$，若设

$$\int_a^b b_i(t)a_j(t)\mathrm{d}t = a_{ij};\quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

由 §2.2 的讨论，就有

$$R_l(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

式中

$$D(x,t;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -a_1(x) & \cdots & -a_n(x) \\ b_1(t) & 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n(t) & -\lambda a_{n1} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

$D(\lambda) = 0$ 的根，是核 $l(x,t)$ 的特征值。

还可以给出另一种估计。设

$$k(x,t) = l(x,t) + \gamma(x,t)$$

式中 $l(x,t)$为退化核；而 $\gamma(x,t)$按某种度量有较小的范数。

设 $k(x,t)$、$l(x,t)$的解核分别为 $R_k(x,t)$、$R_l(x,t)$，相应的算子范数分别为 $\| R_k \|$、$\| R_l \|$，$\gamma(x,t)$对应算子的范数为 $\| \Gamma \|$，此时有

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \| \leqslant \| \Gamma \| (1 + \| R_k \|)(1 + \| R_l \|) \| f \| \tag{7.1-13}$$

上式中的范数可以取自任意的函数空间。

对于任意核 $k(x,t)$，解核 $R_k(x,t;\lambda)$的范数成立以下估计

$$\| R_k \| \leqslant \frac{\| K \|}{1 - |\lambda| \, \| K \|} \tag{7.1-14}$$

对于区间$[a,b]$上连续函数的空间 $C[a,b]$

$$\| K \| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b |k(x,t)|\mathrm{d}t$$

$$\| f \| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

在区域 $a \leqslant x$，$t \leqslant b$ 上平方可积的函数空间 $L_2[a,b]$ 中

$$\| K \| = \left[\int_a^b \int_a^b k^2(x,t) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

$$\| f \| = \left[\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x \right]^{1/2}$$

例 7.1.1 求方程

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(xt) \varphi(t) \mathrm{d}t + f(x)$$

的近似解，并估计误差。

解 用退化核 $1 - \dfrac{x^2t^2}{2}$ 代替核 $\cos(xt)$，然后解方程

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2t^2}{2}\right) \tilde{\varphi}(t) \mathrm{d}t + f(x) \tag{7.1-15}$$

上述退化核方程的解可设为

$$\tilde{\varphi}(x) = c_1 + c_2 x^2 + f(x) \tag{7.1-16}$$

记
$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \mathrm{d}t = f_0, \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t) \mathrm{d}t = f_2$$

把式(7.1-16)代入式(7.1-15)中，可得关于 c_1，c_2 的代数方程组

$$\begin{cases} c_1 - \dfrac{1}{12} c_2 = 2f_0 \\ \dfrac{1}{24} c_1 + \dfrac{321}{160} c_2 = - f_2 \end{cases}$$

解之，得

$$c_1 = \frac{2\ 889 f_0 - 60 f_2}{1\ 447}, c_2 = \frac{-60 f_0 - 720 f_2}{1\ 447}$$

于是得近似解

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{2\ 889 f_0 - 60 f_2}{1447} + \frac{-(60 f_0 + 720 f_2)}{1\ 447} x + f(x) \tag{7.1-17}$$

由于 $\lambda = 1$，而

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \cos(xt) - \left(1 - \frac{x^2t^2}{2}\right) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4t^4}{4!} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 x^4 \leqslant \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^9 < 2.10^{-5}$$

因此可取 $h = 2.10^{-5}$，由式(7.1-17)得

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{1\ 447} \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ 889 - 60x^2 - 60t^2 - 720x^2t^2) f(t) \mathrm{d}t + f(x)$$

于是
$$R_i(x,t;1) = \frac{1}{1\ 447} (2\ 889 - 60x^2 - 60t^2 - 720x^2t^2)$$

由于 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|R_l(x,t;1)|\mathrm{d}t = \frac{1}{1\,447}\left|\frac{2\,889-60x^2}{2} - \frac{20+240x^2}{8}\right| < 1$$

因而可取 $R=1$，从而

$$1-|\lambda|h(1+|\lambda|R) = 1-2\cdot 10^{-5}(1+1)\approx 1$$

由式（7.1－7）

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)| < B\frac{2\cdot 10^{-5}(1+1)^2}{1-2\cdot 10^{-5}(1+1)} < 9\cdot 10^{-5}B$$

式中 B 为 $|f(x)|$ 的一个上界。

例 7.1.2 求方程

$$\varphi(x) = \int_0^1(1-x\cos xt)\varphi(t)\mathrm{d}t+\sin x \tag{7.1－18}$$

的近似解。

解 把核 $k(x,t)=1-x\cos xt$ 展开为级数

$$k(x,t) = 1-x+\frac{x^3t^2}{2!}-\frac{x^5t^4}{4!}+\cdots$$

取退化核

$$l(x,t) = 1-x+\frac{x^3t^2}{2}$$

作为近似核。

解方程

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_0^1\left(1-x+\frac{x^3t^2}{2}\right)\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t+\sin x \tag{7.1－19}$$

由式（7.1－19）得

$$\tilde{\varphi}(x) = \sin x+c_1(1-x)+c_2x^3 \tag{7.1－20}$$

式中

$$c_1 = \int_0^1\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t,\quad c_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t \tag{7.1－21}$$

把式(7.1－20)代入式(7.1－21)，得到确定 c_1、c_2 的方程组

$$c_1 = \int_0^1[\sin t+c_1(1-t)+c_2t^3]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}c_1+\frac{1}{4}c_2+1-\cos 1$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\int_0^1[t^2\sin t+c_1(t^2-t^3)+c_2t^5]\mathrm{d}t = \frac{1}{24}c_1+\frac{1}{12}c_2+\sin 1-1+\frac{1}{2}\cos 1$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}c_1-\dfrac{1}{4}c_2 = 1-\cos 1\\[2mm] -\dfrac{1}{24}c_1+\dfrac{11}{12}c_2 = \sin 1-1+\dfrac{1}{2}\cos 1\end{cases}$$

解之，得

$$c_1 = \frac{24}{43}\left(\sin 1-\frac{19}{6}\cos 1+\frac{8}{3}\right) = 1.002\,85$$

$$c_2 = \frac{4}{43}(12\sin 1+5\cos 1-11) = 0.167\,42$$

于是 $\tilde{\varphi}(x) = 1.002\,85(1-x) + 0.167\,42x^3 + \sin x$

实际上，原方程(7.1-18)的精确解为 $\varphi(x)\equiv 1$。

以下用式(7.1-13)来估计 $\|\varphi-\tilde{\varphi}\|$。在空间 L_2 中

$$\|\Gamma\| \leqslant \frac{1}{24}\left\{\int_0^1\int_0^1 x^{12}t^8 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238}$$

$$\|K\| \leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 (1 - x\cos xt)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$

$$= \left(2\cos 1 - \frac{1}{8}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6}\right)^{1/2} < \frac{3}{5}$$

$$\|L\| \leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 \left(1 - x - \frac{x^3t^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5}$$

$$\|f\| = \left\{\int_0^1 \sin^2 x\mathrm{d}x\right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2-\sin 2}}{2} < \frac{3}{5}$$

因为$|\lambda|=1$，由式(7.1-14)

$$\|R_k\| \leqslant \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\,\|K\|} < \frac{3}{2},\quad \|R_l\| \leqslant \frac{\|L\|}{1-|\lambda|\,\|L\|} < \frac{3}{2}$$

再由式(7.1-13)

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\| < \frac{1}{238}\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{5} < 0.016$$

把 Fredholm 方程(7.1-1)的核 $k(x,t)$用退化核代替，需要把已知核 $k(x,t)$分解：

$$k(x,t) = l(x,t) + \gamma(x,t) \tag{7.1-22}$$

按式(7.1-22)分解的方式，除了前面介绍的以外，还有许多种，列举如下：

1° 设序列 $\{u_i(x)\}$ 是在 $L^2(a,b)$中的正交完备系，于是核 $k(x,t)$可以展开为平均收敛的二重 Fourier 级数

$$k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}u_i(x)u_j(t)$$

式中

$$A_{ij} = \int_a^b\int_a^b k(x,t)\,\overline{u_i(x)}\;\overline{u_j(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

当 n 足够大，可以设

$$l(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}u_i(x)u_j(t)$$

2° 还可以求出展开式

$$k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} B_{ij}u_i(x)\,\overline{u_j(t)}$$

式中

$$B_{ij} = \int_a^b\int_a^b k(x,t)\,\overline{u_i(x)}u_j(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

此时可设

$$l(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}u_i(x)\,\overline{u_j(t)}$$

3° 设 $\{u_i(x)\}$ $(i=1,2,\cdots)$在 $L_2(a,b)$中完备但不正交，此时$\overline{u_i(x)}u_j(t)$在 $L_2(a,b;a,b)$

完备但不正交，可以设

$$l(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_i(x)\overline{u_j(t)}$$

式中的系数 A_{ij}这样来选取，使得

$$\int_a^b\int_a^b|k(x,t)-l(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\min \tag{7.1-23}$$

上述系数 A_{ij}可以由下列方程组

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\int_a^b u_i(x)\overline{u_{i'}(x)}\mathrm{d}x\int_a^b\overline{u_j(t)}u_{j'}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{u_{i'}(x)}u_{j'}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\quad(i',j'=1,2,\cdots,n)$$

完全确定。

此外，还可以设

$$l(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}u_i(x)u_j(t)$$

式中 系数 B_{ij}由下列方程组来确定

$$\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}\int_a^b u_i(x)\overline{u_{i'}(x)}\mathrm{d}x\int_a^b u_j(t)\overline{u_{j'}(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{u_{i'}(x)}\ \overline{u_{j'}(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\quad(i',j'=1,2,\cdots,n)$$

4° 在3°中所介绍的两种方法是以下更一般方法的特殊情况：

设序列$\{u_i(x)\}$及$\{v_i(x)\}$ $(1\leqslant i<\infty)$在 $L_2(a,b)$中完备但(一般说来)不正交。此时可以设

$$l(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_i(x)v_j(t)$$

而系数 A_{ij}这样来选取，使得式(7.1-23)成立。于是 A_{ij}可以通过解下列方程组得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\int_a^b u_i(x)\overline{u_{i'}(x)}\mathrm{d}x\int_a^b v_j(t)\overline{v_{j'}(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{u_{i'}(x)}\ \overline{v_{j'}(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

5° 若(a,b)为有限区间，核 $k(x,t)$在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 连续，则核可以用 x，t 的多项式一致逼近，此时可以取此多项式为 $l(x,t)$。

6° 在§7.4 中将介绍的 Galerkin 法及最小二乘法，也是一种把已知核用退化核代替来解积分方程的方法。

§7.2 用数值积分法求积分方程的近似解

对于第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{7.2-1}$$

可以用退化核代替它的核来求它的近似解，但这需要计算积分，当退化核的项数较多时，要

进行的计算很复杂，这种缺点在用逐次逼近法求近似解时也会出现。以下介绍用数值积分公式把积分方程中的积分用和式代替，然后求出它的近似解的方法，这就可以免去复杂的积分运算。当核 $k(x,t)$不是由解析式，而是由数表形式给出时，这种方法更显出它的优越性。

1. 用线性方程组代替积分方程

设方程(7.2-1)中的 $k(x,t)$及 $f(x)$存在一定阶数的连续导数，这样能保证相应的数值积分公式有效；λ 为已知常数。

取任一种数值积分公式

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} A_j g(x_j) \tag{7.2-2}$$

式中 x_1，x_2，…，x_n 为区间$[a,b]$中点的坐标，系数 A_1，A_2，…，A_n 与函数 $g(x)$的形式无关。

对于式(7.2-1)，令 $x=x_j(j=1,2,\cdots,n)$，得到

$$\varphi(x_j) - \lambda\int_a^b k(x_j,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x_j) \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{7.2-3}$$

由数值积分公式式(7.2-2)，式(7.2-3)左端的积分可以用和式代替

$$\varphi(x_j) - \lambda\sum_{m=1}^{n} A_m k(x_j,x_m)\varphi(x_m) \doteq f(x_j)$$

考虑方程组

$$\tilde{\varphi}(x_j) - \lambda\sum_{m=1}^{n} A_m k(x_j,x_m)\tilde{\varphi}(x_m) = f(x_j) \tag{7.2-4}$$

方程组(7.2-4)是由 n 个未知数 $\tilde{\varphi}(x_1)$，$\tilde{\varphi}(x_2)$，…，$\tilde{\varphi}(x_n)$的 n 个代数方程构成的线性方程组。解此方程组，所得到的解 $\tilde{\varphi}(x_1)$，$\tilde{\varphi}(x_2)$，…，$\tilde{\varphi}(x_n)$可以作为 $\varphi(x)$在节点 x_1，x_2，…，x_n 的近似值，从而可以把方程(7.2-1)在区间$[a,b]$的近似解取为

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda\sum_{m=1}^{n} A_m k(x,x_m)\tilde{\varphi}(x_m) \tag{7.2-5}$$

在节点处，$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)$，节点取得越多，照例误差越小，但由于节点个数增多，解线性方程组(7.2-4)的难度增加，累积误差也增大。因此，为了减小误差，要选取较精确的数值积分公式，例如选用 Gauss 公式或 Chebyshev 公式。虽然 Gauss 公式更准确，但由于 Chebyshev 公式中的 A_m 是相同的，所以用 Chebyshev 公式求积分方程的近似解要简便些。

2. 数值积分公式及误差估计

在数值积分公式(7.2-2)中，系数 A_j 及坐标 x_j 分别为

(1) 矩形公式

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \cdots, x_n = a + (n-1)h;$$

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = h, h = \frac{b-a}{n}$$

(2) 梯形公式

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \cdots, x_n = a + (n-1)h = b$$

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = h, h = \frac{b-a}{n-1}$$

(3) Simpson 公式

$$x_1 = a, x_2 = a + h, \cdots, x_{2m+1} = a + 2mh = b$$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, A_2 = A_4 = \cdots = A_{2m} = \frac{4h}{3}$$

$$A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m-1} = \frac{2}{3}h, h = \frac{b-a}{2m}$$

用数值积分公式求积分方程近似解所引起的误差，决定于所采用数值积分公式所产生的误差。如果数值积分公式所产生的误差越小，则用方程组(7.2-4)代替积分方程(7.2-1)所得到的结果的误差就越小。

在利用数值积分公式时，要考虑被积函数是否具有数值积分公式余项(即误差)中所涉及的导数。这就要求 $k(x,t)$ 及 $\varphi(x)$ 具有相应的导数。而为了使 $\varphi(x)$ 满足上述要求，只要 $k(x,t)$ 及 $f(x)$ 具有相应的导数就可以了。这是由于若 $k(x,t)$ 及 $f(x)$ 具有直到 n 阶的连续导数 $\frac{\partial^n k(x,t)}{\partial x^n}$ 及 $f^{(n)}(x)$，则对式(7.2-1)两端求导 n 次，就可知 $\varphi(x)$ 具有 n 阶连续导数。

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda\int_a^b \frac{\partial^n k(x,t)}{\partial x^n}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{7.2-6}$$

如果核 $k(x,t)$ 具有若干阶导数，但 $f(x)$ 具有奇点，则可作未知函数的代换

$$\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$$

于是得到

$$\psi(x) - \lambda\int_a^r k(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t = f^*(x) \tag{7.2-7}$$

式中

$$f^*(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

方程(7.2-7)与(7.2-1)类型相同，但它的自由项不再有奇点。

此外，当核 $k(x,t)$ 在 $t=x$ 上有奇点时，通常是 $k(x,t)$ 本身或它的导数 $k_t(x,t)$ 在 $t=x$ 上有跳跃。在把方程(7.2-1)化为方程组(7.2-4)前，可以把方程(7.2-1)写成

$$\varphi(x)\left[1 - \lambda\int_a^b k(x,t)\mathrm{d}t\right] - \lambda\int_a^b k(x,t)[\varphi(t) - \varphi(x)]\mathrm{d}t = f(x) \tag{7.2-8}$$

上式左端第二个积分中 $\varphi(t)-\varphi(x)$ 当 $t=x$ 时为零，因此被积函数不再具有间断点，于是可把此积分用有限和来近似。另外在 $\omega(x) \equiv \int_a^b k(x,t)\mathrm{d}t$ 中不含未知函数，所以容易计算出来。这样方程(7.2-8)可以用有限方程组

$$\tilde{\varphi}(x_i)[1 - \lambda\omega(x_i)] - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k k(x_i,x_k)[\tilde{\varphi}(x_k) - \tilde{\varphi}(x_i)] = f(x_i)$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

来近似。利用上述方程组求出的近似解，比用方程组(7.2-4)求出的近似解要好。

如果核为对称核，即 $k(x,t)=k(t,x)$ 时，方程组(7.2-4)不一定是对称方程组。为了使方程组(7.2-4)比较简单，可以进行对称化，即把第 m 个方程乘以 $\sqrt{A_m}$，并令 $z_m = \sqrt{A_m}\tilde{\varphi}(x_m)$，于是得到一组含 z_i 的对称方程组，此时 $\tilde{\varphi}(x_m)$ 的系数换成为 $\sqrt{A_i A_m}k(x_i,x_m)$。

以下进行误差估计。方程组(7.2-4)的系数行列式为

$$\varDelta(\lambda) = \det(\delta_{jm} - \lambda A_m k_{jm}) \quad j,m = 1,2,\cdots,n$$

记$\varDelta_{jm}$是行列式$\varDelta(\lambda)$的第j列、第m行元素的代数余子式。则方程组(7.2-4)的解可写成

$$\tilde{\varphi}(x_j) = \frac{1}{\varDelta(\lambda)}\sum_{m=1}^{n}\varDelta_{jm}f(x_m) \ (j = 1,2,\cdots,n) \qquad (7.2-9)$$

下面来估计未知函数$\varphi(x)$在$x_1,x_2,\cdots,x_n$各点的准确值$\varphi(x_i)$与$\tilde{\varphi}(x_i)$的差($i=1,2,\cdots,n$)。

设$f(x)$与$k(x,t)$有p阶连续导数，于是$\varphi(x)$就也有p阶连续导数。记$H^{(s)}$，$N^{(s)}$，$M_x^{(s)}$，$M_t^{(s)}$分别为$|\varphi^{(s)}(x)|$，$|f^{(s)}(x)|$，$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}k(x,t)\right|$，$\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}k(x,t)\right|$的上界，而$H^{(0)}$，$N^{(0)}$，$M^{(0)}$分别为$|\varphi(x)|$，$|f(x)|$，$|k(x,t)|$的上界。这样容易估计出被积函数$k(x,t)\varphi(t)$及其导数的上界。由 Leibniz 的乘积求导法则，就有

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial t^s}[k(x,t)\varphi(t)]\right| \leqslant H^{0}M_t^{(s)} + C_s^1 H^{(1)}M_t^{(s-1)} + \cdots + H^{(s)}M^{(0)} = T^{(s)} \qquad (7.2-10)$$

再记

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}A_m k(x,x_m)\varphi(x_m) = \rho(x)$$

的绝对值的上界为σ，则有

$$|\rho(x)| \leqslant \sigma,\ |\rho(x_i)| \leqslant \sigma$$

σ容易用包含$T^{(s)}$的公式来估计。这个估计与所用的数值积分公式有关。例如，在用梯形公式时

$$\sigma \leqslant \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{(n-1)^2}T^{(2)}$$

用 Simpson 公式时

$$\sigma \leqslant \frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{(n-1)^4}T^{(4)}$$

而用 Gauss 公式时

$$\sigma \leqslant \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\frac{T^{(2n)}}{(2n)!}$$

总之，这些估计形式都是$\sigma \leqslant k_n T^{(s)}$，其中$k_n$是一个与数值积分公式的种类有关、而与被积函数无关的数。

现在来估计$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|$。由于

$$\varphi(x_j) - \lambda\sum_{m=1}^{n}A_m k(x_j,x_m)\varphi(x_m) = f(x_j) + \lambda\rho(x_j)$$

由公式(7.2-9)，上述方程组的解为

$$\varphi(x_j) = \frac{1}{\varDelta(\lambda)}\sum_{m=1}^{n}\varDelta_{jm}[f(x_m) + \lambda\rho(x_m)] \quad (j = 1,2,\cdots,n) \qquad (7.2-11)$$

由式(7.2-9)、(7.2-11)，得到

$$|\varphi(x_j) - \tilde{\varphi}(x_j)| \leqslant \frac{1}{|\varDelta(\lambda)|}\sum_{m=1}^{n}|\varDelta_{jm}||\lambda||\rho(x_m)| \leqslant \sigma|\lambda|B$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.2-12}$$

式中
$$B = \max_{j} \sum_{m=1}^{n} \frac{|\Delta_{jm}|}{|\Delta(\lambda)|}$$

由于在解方程组(7.2-4)时已算过Δ_{jm}及$\Delta(x)$，使用估计式(7.2-12)还是较方便的。

把式(7.2-5)及

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} A_m k(x, x_m)\varphi(x_m) + \lambda\rho(x)$$

($|\rho(x)| \leqslant \sigma$)的两端分别相减，考虑到 $\sum_{m=1}^{n} A_m = b - a$，就有

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant |\lambda| \sum_{m=1}^{n} A_m |k(x, x_m)| \cdot |\varphi(x_m) - \tilde{\varphi}(x_m)| + |\lambda|\sigma \leqslant |\lambda|\sigma[1 + |\lambda| BM^{(0)}(b-a)] \tag{7.2-13}$$

估计式(7.2-13)的缺点是在σ的估计式中包含$T^{(s)}$，而$T^{(s)}$中包含未知函数$\varphi(x)$及它的导数的上界$H^{(0)}$，$H^{(1)}$，…，$H^{(s)}$。但此缺点可以避免。由于$H^{(m)}$可以用B，$M_x^{(m)}$，$N^{(m)}$表示。由式(7.2-6)

$$H^{(s)} \leqslant H^{(0)}|\lambda|(b-a)M_t^{(s)} + N^{(s)} \quad s = 0,1,2,\cdots$$

所以对(7.2-10)右端的$T^{(s)}$可进行以下的估计

$$\begin{aligned} T^{(s)} &= H^{(0)}M_t^{(s)} + C_s^1 H^{(1)} M_{t-1}^{(s-1)} + \cdots + H^{(s)}M^{(0)} \leqslant N^{(0)}M_t^{(s)} + C_s^1 N^{(1)} M_{t-1}^{(s-1)} + \\ &\cdots + N^{(s)}M^{(0)} + |\lambda|(b-a)[M^{(0)}M_t^{(s)} + C_s^1 M_t^{(1)} M_{t-1}^{(s-1)}] + \\ &\cdots + M_t^{(s)}M^{(0)}]H^{(0)} \equiv P_s + H^{(0)}Q_s \end{aligned}$$

式中　P_s、Q_s都是已知量。

于是

$$\sigma \leqslant k_n T^{(s)} \leqslant k_n(P_s + Q_s H^{(0)})$$

利用上式，估计式(7.2-13)可写为

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leqslant [M^{(0)}B|\lambda|(b-a) + 1]|\lambda|k_n(P_s + Q_s + Q_s H^{(0)}) \tag{7.2-14}$$

记$|\tilde{\varphi}(x)|$的上界为S，它的大小可以这样估计：由式(7.2-9)及B的定义

$$|\tilde{\varphi}(x_i)| \leqslant BN^{(0)}$$

再由式(7.2-5)，可知

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant N^{(0)} + M^{(0)}|\lambda|(b-a)N^{(0)}B = S$$

由式(7.2-14)，就有

$$|\varphi(x)| \leqslant S + [1 + BM^{(0)}|\lambda|(b-a)]|\lambda|k_n(P_s + Q_s H^{(0)})$$

因此$|\varphi(x)|$的上界

$$H^{(0)} \leqslant S + [1 + BM^{(0)}|\lambda|(b-a)]|\lambda|k_n(P_s + Q_s H^{(0)})$$

若

$$D \equiv 1 - [M^{(0)}|\lambda|B(b-a) + 1]|\lambda|k_n Q_s > 0$$

就可得估计式

$$H^{(0)} \leqslant \frac{S + [M^{(0)}|\lambda|B(b-a) + 1]|\lambda|k_n P_s}{1 - [M^{(0)}|\lambda|B(b-a) + 1]|\lambda|k_n Q_s} \tag{7.2-15}$$

由于 k_n 很小，为使 $D>0$，一般只需 B、$M^{(0)}$、Q_s、$|\lambda|$ 都不太大就可以了。

当 $D>0$ 时，解 $\varphi(x)$ 有界，这说明 λ 不是积分方程的特征值。否则，对此 $\varphi(x)$ 可以加上齐次积分方程的任何解(所加上的解可以取得很大)，使不等式(7.2－15)不能成立。

把估计式(7.2－15)代入式(7.2－14)，就可以得到 $|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|$ 的估计式，在其中只出现未知量，而不再出现未知函数及其导数的上界。

例 7.2.1 求方程

$$\varphi(x)+\int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)\mathrm{d}t=e^x-x \tag{7.2-16}$$

的近似解。

解 在[0,1]中取 $x_1=0$，$x_2=0.5$，$x_3=1$。对式(7.2－16)令 $x=0$，$x=0.5$，$x=1$，得到

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\\ \varphi(0.5)+0.5\int_0^1(\mathrm{e}^{0.5t}-1)\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{0.5}-0.5\\ \varphi(1)+\int_0^1(\mathrm{e}^t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}-1\end{cases} \tag{7.2-17}$$

用 Simpson 公式

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=\frac{g(0)+4g(0.5)+g(1)}{6}$$

将上列方程组每一个方程中的积分用有限和代替。式(7.2－17)中第二个方程的被积函数

$$g_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{0.5t}-1}{2}\varphi(t)$$

于是 $\quad g_1(0)=0,g_1(0.5)=\dfrac{\mathrm{e}^{0.25}-1}{2}\varphi(0.5),g_1(1)=\dfrac{\mathrm{e}^{0.5}-1}{2}\varphi(1)$

因此

$$0.5\int_0^1(\mathrm{e}^{0.5t}-1)\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{0.25}-1}{3}\varphi(0.5)+\frac{\mathrm{e}^{0.5}-1}{12}\varphi(1) \tag{7.2-18}$$

式(7.2－17)中第三个方程的被积函数 $g_2(t)=(\mathrm{e}^t-1)\varphi(t)$，于是

$$g_2(0)=0,g_2(0.5)=(\mathrm{e}^{0.5}-1)\varphi(0.5),g_2(1)=(\mathrm{e}-1)\varphi(1)$$

因此

$$\int_0^1(\mathrm{e}^t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{4(\mathrm{e}^{0.5}-1)\varphi(0.5)+(\mathrm{e}-1)\varphi(1)}{6} \tag{7.2-19}$$

把式(7.2－18)、(7.2－19)代入式(7.2－17)，得线性方程组

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\\ \dfrac{\mathrm{e}^{0.25}+2}{3}\varphi(0.5)+\dfrac{\mathrm{e}^{0.5}-1}{12}\varphi(1)=\mathrm{e}^{0.5}-0.5\\ \dfrac{2(\mathrm{e}^{0.5}-1)}{3}\varphi(0.5)+\dfrac{\mathrm{e}+5}{6}\varphi(1)=\mathrm{e}-1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\varphi(0)=1\\ 1.094\,7\varphi(0.5)+0.054\,1\varphi(1)=1.148\,7\\ 0.432\,5\varphi(0.5)+1.286\,4\varphi(1)=1.718\,3\end{cases}$$

解之，得

$$\varphi(0)=1,\varphi(0.5)=0.999\ 9,\varphi(1)=0.999\ 6 \tag{7.2-20}$$

取
$$\tilde{\varphi}(x)=e^{x}-x-\sum_{m=1}^{3}A_m x(e^{x_m x}-1)\varphi(x_m)$$

式中　$x_1=0$，$x_2=0.5$，$x_3=1$；$A_1=\frac{1}{6}$，$A_2=\frac{2}{3}$，$A_3=\frac{1}{6}$。

由式(7.2-20)

$$\tilde{\varphi}(x)=e^{x}-x(0.6666e^{0.5x}+0.1666e^{x})-0.1668x$$

实际上，方程(7.2-6)的精确解为$\varphi(x)\equiv 1$。

设L为平面上一条充分光滑的闭曲线，由L所围的平面区域上的Laplace方程第一(内)边值问题(Dirichlet问题)

$$\Delta u(x,y)=0,u|_L=f(t)$$

可以化为解积分方程

$$\pi\mu(t)-\int_L\frac{\partial\ln\frac{1}{r}}{\partial n}\mu(\tau)\mathrm{d}\sigma=f(t) \tag{7.2-21}$$

式中　t、τ是确定曲线L上点的位置的参数值。

$P\{x(t),y(t)\}$，$P_1\{x(\tau),y(\tau)\}$，$x=x(\tau)$，$y=y(\tau)$，$0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$为曲线$L$的参数方程；$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PP_1}$，$r$为$\boldsymbol{r}$的模；$\boldsymbol{n}$为$P_1$点处的外法线向量；$\mathrm{d}\sigma$为弧长微元；$\mu(t)$为未知函数；$f(t)$为已知函数。当寻求以$\mu(t)$为密度的双层势形式的调和函数时，就得到积分方程(7.2-21)。

以下给出$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\sigma$的其他形式的表达式。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}\sigma&=\left[\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{1}{r}+\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}\sigma\\&=-\frac{1}{r}\left[\frac{x(\tau)-x(t)}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+\frac{y(\tau)-y(t)}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\right]\mathrm{d}\sigma\\&=-\frac{1}{r}\left[\frac{x(\tau)-x(t)}{r}(-\mathrm{d}y)+\frac{y(\tau)-y(t)}{r}\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{1}{r}\frac{[y(\tau)-y(t)]x'(\tau)-[x(\tau)-x(t)]y'(\tau)}{r}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

于是式(7.2-21)可记为

$$\pi\mu(t)+\int_0^{\tau_0}\mu(\tau)\frac{[y(t)-y(\tau)]x'(\tau)-[x(t)-x(\tau)]y'(\tau)}{[x(t)-x(\tau)]^2+[y(t)-y(\tau)]^2}\mathrm{d}\tau$$
$$=f(t)$$

当L为椭圆

$$x=a\cos\tau,y=b\sin\tau,-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi$$

方程(7.2-21)就化为

$$\pi\mu(t)+\frac{b}{2a}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mu(\tau)}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}\mathrm{d}\tau=f(t)$$

式中　ε为椭圆的离心率$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}$。特别是，当$a=5$，$b=3$，$f(t)=\pi(x^2+y^2)=\pi[25-16\sin^2 t]$时，方程(7.2-21)就取以下形式

$$\mu(t)+\frac{3}{10\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mu(\tau)}{1-0.64\cos^2\frac{t+\tau}{2}}\mathrm{d}\tau=25-16\sin^2 t \tag{7.2-22}$$

上式积分前的系数 $\frac{3}{10\pi}\approx 0.0955$，为了简化计算把它取为 0.1，于是可以求下列积分方程

$$\mu(t)+\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{6.8-3.2\cos(t+\tau)}=25-16\sin^2 t \tag{7.2-23}$$

的近似解。

例 7.2.2 求积分方程(7.2-23)的近似解。

解 不难看出，方程(7.2-23)的解具有性质

$$\mu(-t)=\mu(t)$$

把积分区间 $|t|\leqslant\pi$ 分为 12 等分，把 $\mu(j\cdot\frac{\pi}{6})$ 的近似值记为 $\mu_j(j=0,1,2,\cdots,6)$，由问题的对称性，可知 $\mu_j=\mu_{6-j}$，因此只需在 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内确定 $\mu(t)$ 就可以了。再利用矩形公式求积分的近似值，可得到确定 μ_0、μ_1、μ_2、μ_3 的线性代数方程组

$$\begin{cases}1.19\mu_0+0.35\mu_1+0.31\mu_2+0.15\mu_3=25\\0.18\mu_0+1.34\mu_1+0.32\mu_2+0.16\mu_3=21\\0.16\mu_0+0.32\mu_1+1.34\mu_2+0.18\mu_3=13\\0.15\mu_0+0.31\mu_1+0.35\mu_2+1.19\mu_3=9\end{cases}$$

解之，得

$$\mu_0=16.074,\mu_1=12.274,\mu_2=4.726,\mu_3=0.953$$

实际上，方程(7.2-12)的精确解为

$$\mu(t)=\frac{17}{2}+\frac{128}{17}\cos 2t=8.50+7.53\cos 2t$$

于是
$$\mu(0)=16.03,\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)=12.265,\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)=4.735,\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.970$$

由此可见，误差不超过 2%。

3. 第一类 Fredholm 方程的近似解

以上看到，第二类 Fredholm 方程的近似解可以用数值积分公式求出。第一类 Fredholm 方程

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{7.2-24}$$

的近似解，原则上亦可用数值积分公式来求。

将式(7.2-24)中的积分用数值积分公式中的和式代替，与第二类 Fredholm 方程类似，可得到

$$f(x_j)=\sum_{m=1}^{n}A_m k(x_j,x_m)\varphi(x_m) \tag{7.2-25}$$

式中 A_m 是求积系数。若记 $f(x_j)=f_j$，$\varphi(x_m)=\varphi_m$，$A_m k(x_j,x_m)=B_{jm}$，则式(7.2-25)就成为

$$f_j = \sum_{m=1}^{n} B_{jm}\varphi_m$$

若矩阵 $B=\{B_{jm}\}$ 的逆矩阵 $C=\{C_{jm}\}$ 存在，则

$$\varphi(x_m) = \varphi_m = \sum_{j=1}^{n} C_{mj} f_j$$

由于矩阵 B(关于矩阵求逆的运算来说)是病态矩阵，在求逆的过程中，$f(x)(f_j)$的小的误差会引起 $\varphi(x)(\varphi_m)$大的误差，所以用上述数值积分法求第一类 Fredholm 方程的近似解，结果往往不理想。此外，可能会出现积分方程(7.2-24)原来无解，但经离散化后得到的线性代数方程组却有解的情况，如果看不出这个事实，就会产生错误。

4. 第二类 Volterra 方程

第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{7.2-26}$$

也可以利用数值积分公式求近似解，式中 $k(x,t)$定义在 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$ 上；$f(x)$定义在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上。

如果当 $a\leqslant x<t\leqslant b$ 时，定义 $k(x,t)=0$，则式(7.2-26)可看成为第二类 Fredholm 方程。对方程(7.2-26)令 $x=x_j(j=1,2,\cdots,n)$，并利用式(7.2-2)把其中的积分用有限和代替，就有

$$\varphi_j - \lambda\sum_{m=1}^{j} A_m k_{jm}\varphi_m = f_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{7.2-27}$$

式中　$\varphi_j=\varphi(x_j)$，$k_{jm}=k(x_j,x_m)$，$f_j=f(x_j)$。

式(7.2-27)是一个线性方程组，由于它的系数阵是一个下三角矩阵，求解非常方便。在$[a,b]$内各节点之间的点，解的近似值可以用下式求出

$$\varphi(x) \approx \lambda\sum_{m=1}^{j} A_m k(x,x_m)\varphi_m + f(x) \quad x_{j-1}<x\leqslant x_j \tag{7.2-28}$$

当 $j\to\infty$时，这个近似解一致收敛于方程(7.2-26)的精确解。

例 7.2.3　求方程

$$\varphi(x) - \int_0^x \mathrm{e}^{-x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.5(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-3x}) \tag{7.2-29}$$

在$[0,1]$的近似解，步长 h 取为 0.2。

解　用 $n=6$ 的梯形公式，就有

$$A_1 = A_6 = \frac{h}{2} \doteq 0.1, A_m = h = 0.2 \quad (m=2,3,4,5)$$

对方程(7.3-29)令 $x=x_j(j=1,2,\cdots,6)$，得到

$$\varphi_1 = f_1$$

$$\varphi_j - \int_0^{x_j}\mathrm{e}^{-x_j-t}\varphi(t)\mathrm{d}t = 0.5(\mathrm{e}^{-x_j} + \mathrm{e}^{-3x_j}) \quad j=2,3,\cdots,6$$

对上式中的定积分用梯形公式($h=0.2$)，就有

$$
\begin{cases}
\varphi_1 = f_1 \\
\varphi_2 - \dfrac{h}{2}(k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2) = f_2 \\
\varphi_3 - \dfrac{h}{2}(k_{31}\varphi_1 + 2k_{32}\varphi_2 + k_{33}\varphi_3) = f_3 \\
\varphi_4 - \dfrac{h}{2}[k_{41}\varphi_1 + 2(k_{42}\varphi_2 + k_{43}\varphi_3) + k_{44}\varphi_4] = f_4 \\
\varphi_5 - \dfrac{h}{2}[k_{51}\varphi_1 + 2(k_{52}\varphi_2 + k_{53}\varphi_3 + k_{54}\varphi_4) + k_{55}\varphi_5] = f_5 \\
\varphi_6 - \dfrac{h}{2}[k_{61}\varphi_1 + 2(k_{62}\varphi_2 + k_{63}\varphi_3 + k_{64}\varphi_1 + k_{65}\varphi_5) + k_{66}\varphi_6] = f_6
\end{cases}
\qquad (7.2-30)
$$

利用 $k(x,t)=\mathrm{e}^{-x-t}$，$f(x)=0.5(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x})$的函数表(见表 7－1)

表 7－1　函数表

m	k_{1m}	k_{2m}	k_{3m}	k_{4m}	k_{5m}	k_{6m}	f_m
1	1.00000	0.81873	0.67032	0.54881	0.44933	0.36788	1.00000
2	0.81873	0.67032	0.54881	0.44933	0.36788	0.30119	0.68378
3	0.67032	0.54881	0.44933	0.36788	0.30119	0.24660	0.48576
4	0.54881	0.44933	0.36788	0.30119	0.24660	0.20190	0.35706
5	0.44933	0.36788	0.30119	0.24660	0.20190	0.16530	0.27003
6	0.36788	0.30119	0.24660	0.20190	0.16530	0.13534	0.20884

及式(7.2－30)，可依次求出

$$\varphi_1 = f_1 = 1.0000$$

$$\varphi_2 = \left(f_2 + \frac{h}{2}k_{21}\varphi_1\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_{22}\right)^{-1} = 0.820\,7$$

$$\varphi_3 = \left(f_3 + \frac{h}{2}k_{31}\varphi_1 + hk_{32}\varphi_2\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_{33}\right)^{-1} = 0.673\,1$$

$$\varphi_4 = \left(f_4 + \frac{h}{2}k_{41}\varphi_1 + h(k_{42}\varphi_2 + k_{43}\varphi_3)\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_{44}\right)^{-1} = 0.551\,8$$

$$\varphi_5 = \left(f_6 + \frac{h}{2}k_{51}\varphi_1 + h(k_{52}\varphi_2 + k_{53}\varphi_3 + k_{54}\varphi_4)\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_{55}\right)^{-1} = 0.452\,3$$

$$\varphi_6 = \left(f_6 + \frac{h}{2}k_{61}\varphi_1 + h(k_{62}\varphi_2 + k_{63}\varphi_3 + k_{64}\varphi_4 + k_{65}\varphi_5)\right)\left(1 - \frac{h}{2}k_{66}\right)^{-1} = 0.370\,5$$

再由式(7.2－28)，可得方程(7.2－29)的近似解。

5. 第一类 Volterra 方程的近似解

对第一类 Volterra 方程

$$\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \qquad (7.2-31)$$

可直接用数值积分公式求近似解，不必化为第二类 Volterra 方程求解。

例 7.2.4　用**梯形法则**求方程

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x \qquad (7.2-32)$$

的近似解，式中 $0\leqslant t\leqslant x\leqslant 2$，步长取为 $h=0.1$。

解 对式(7.2－32)令 $x=0.1$，并利用梯形公式就有

$$\frac{1}{2}\cdot 0.1[(\cos 0.1)\varphi(0)+(\cos 0)\varphi(0.1)]\approx \sin 0.1$$

为了求出 $\varphi(0.1)$ 的近似值，需要定出 $\varphi(0)$，当 $k(x,x)\neq 0$ 时，由式(4.2－2)，成立 $\varphi(a)=\frac{f'(a)}{k(a,a)}$。如果 $f'(a)$ 不能明显表出，则可用近似式 $\frac{1}{2h}[f(a+h)-f(a-h)]$ 代替。对于方程(7.2－32)

$$\varphi(0)=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

从而

$$\varphi(0.1)\approx\left[\frac{2\sin 0.1}{0.1}-\cos 0.1\right]\approx 1.001\ 66$$

类似地令 $x=0.2$，就有

$$\frac{1}{2}0.1[(\cos 0.2)\varphi(0)+2(\cos 0.1)\varphi(0.1)+(\cos 0)\varphi(0.2)]=\sin 0.2$$

$$\varphi(0.2)\approx 1.000\ 01$$

对方程(7.2－31)，用公式

$$\frac{1}{2}h\sum_{m=0}^{j-1}\{k[jh,mh]\varphi(mh)+k[jh,(m+1)h]\varphi[(m+1)h]\}=f(jh)\quad j=1,2,\cdots$$

可按上述类似的方式依次求出 $\varphi(jh)(j=1,2,\cdots)$，由于对应线性方程组的系数矩阵是下三角矩阵，所以很容易求出 $\varphi(jh)$。

对于本例中的方程(7.2－32)有

$$\frac{1}{2}h\sum_{m=0}^{j-1}\{\cos[(j-m)h]\varphi(mh)+$$

$$\cos[(j-m-1)h]\varphi[(m+1)h]\}=\sin jh\qquad(j=1,2,\cdots)$$

可依次求出，见表 7－2。

表 7－2 例 7.2.4 计算结果

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\varphi(x)$	1.0000	1.00166	1.00001	1.00166	1.00001	1.00166	1.00001	1.00166	1.00001	1.00166	0.99998

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\varphi(x)$	1.00167	0.99999	1.00168	0.99996	1.00171	0.99994	1.00172	0.99992	1.00177	0.99985

实际上，方程(7.2－32)的解可以用积分变换求出：$\varphi(x)=1$。

§7.3 逐次逼近法

在理论上，可以用逐次逼近法证明积分方程解的存在性，在实用上，可以用这种方法得到积分方程的近似解。逐次逼近法不仅适用于线性积分方程，还可用于非线性积分方程及积分方程组。

1. 第二类 Fredholm 方程

第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.3-1}$$

可以用迭代公式

$$\varphi_{m+1}(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_m(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.2-2}$$

得到函数序列 $\{\varphi_m(x)\}$，如果 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)$ 存在，则极限函数就是方程(7.3－1)的精确解。

对某一正整数 m，$\varphi_m(x)$可以作为方程(7.3－1)的近似解，零次近似 $\varphi_0(x)$可任意选取。

以下给出序列(7.3－2)收敛的条件。

首先假设

$$B=\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty \tag{7.3-3}$$

$$F^2=\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty \tag{7.3-4}$$

上述要求不是必要的，但作上述假设可以使逐次逼近法收敛的条件表达得较为简单。

定理 7.3.1 设条件式(7.3－3)及(7.3－4)成立，若$|\lambda|<|\lambda_1|$，式中 λ_1 是核 $k(x,t)$的第一特征值(即绝对值最小的特征值)，则由式(7.3－2)定义的序列 $\{\varphi_m(x)\}$ 平方平均收敛于积分方程(7.3－1)的解。

如果上述定理的条件成立，而核 $k(x,t)$还满足条件

$$\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}t<C_1^2=\text{const}\quad(a\leqslant x\leqslant b) \tag{7.3-5}$$

则序列 $\{\varphi_m(x)\}$ 在区间$[a,b]$上一致收敛于积分方程(7.3－1)的解。

取 $m+1$ 阶近似所引起的误差，有以下估计：

$$|\varphi(x)-\varphi_{m+1}(x)|\leqslant C_1B^{-1}|\lambda B|^{m+1}\left(\Phi+\frac{F}{1-|\lambda B|}\right) \tag{7.3-6}$$

式中 F 由式(7.3－4)确定；$\Phi=\sqrt{\int_a^b\varphi_0^2(x)\mathrm{d}x}$，$C_1=\sqrt{\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t}$。

定理 7.3.1 在某种意义下的逆命题也成立：如果对于某个 λ，且对方程(7.3－1)的任意的自由项 $f(x)$，逐次逼近过程都收敛，则$|\lambda|<|\lambda_1|$。

由于条件$|\lambda|<|\lambda_1|$有时不容易验证。以下给出逐次逼近法收敛性的某些更简单的充分条件。

如果积分方程(7.3－1)的核 $k(x,t)$满足条件(7.3－5)，则当

$$|\lambda|<\frac{1}{B} \tag{7.3-7}$$

成立时，序列 $\{\varphi_m(x)\}$ 在$[a,b]$上一致收敛于方程(7.3－1)的解。

如果区间(a,b)为有限，而核 $k(x,t)$是一个有界函数，即存在正常数 A，使得对 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 中的所有 x，t 都有$|k(x,t)|\leqslant A$，则当条件

$$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)} \tag{7.3-8}$$

成立时，序列 $\{\varphi_m(x)\}$ 一致收敛于方程(7.3－1)的解。

此外，为了保证序列 $\{\varphi_m(x)\}$ 的收敛性，自由项 $f(x)$满足条件(7.3-4)也不是必要的，实际上只要积分 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 有限就可以了。

对于弱奇性核

$$k(x,t)=\frac{A(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}$$

式中 $|A(x,t)|\leqslant M=\mathrm{const},0<\alpha<1$，则使逐次逼近法的过程收敛的条件是

$$|\lambda|<\frac{1-\alpha}{2^{\alpha}M(b-a)^{1-\alpha}}$$

例 7.3.1 求方程

$$\varphi(x)=\int_0^1 xt^2\varphi(t)\mathrm{d}t+1 \tag{7.3-9}$$

的近似解，并估计近似解的误差。

解 取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，则依次有

$$\varphi_1(x)=\int_0^1 xt^2\cdot 1\mathrm{d}t+1=1+\frac{x}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^1 xt^2\left(1+\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^1 xt^2\left[1+\frac{t}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)\right]\mathrm{d}t=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$$

……

$$\varphi_{m+1}(x)=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^m}\right)$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_{m+1}(x)=1+\frac{x}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{4}{9}x$$

容易验证 $1+\frac{4}{9}x$ 确是方程(7.3-9)的解。

以下用不等式(7.3-6)来估计误差，此时 $\lambda=1$，$\Phi=1$，$F=1$，

$$C_1=\sqrt{\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1(xt^2)^2\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{5}},B=\sqrt{\int_0^1\int_2^1(xt^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

于是

$$|\varphi(x)-\varphi_{m+1}(x)|\leqslant\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^{m+1}\left[1+\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{15}}}\right]=\frac{29+\sqrt{15}}{14\sqrt{5}(\sqrt{15})^m}$$

上式右端当 m 增大时，很快收敛于零。

应该指出，用逐次逼近法的主要困难在于用式(7.3-2)计算积分。一般来说，它要用数值积分公式来求，因此在求积分方程近似解时，首先应该考虑用 Taylor 展开把已知核用退化核来代替的方法，或利用数值积分公式用有限和代替方程中的积分这两种方便、行之有效的方法。其次再考虑便于在计算机上进行迭代的逐次逼近法。

用逐次逼近法求第一类 Fredholm 方程近似解的讨论，见 § 6.3。

2. 第二类 Volterra 方程

在§7.2 中，我们已经介绍了用数值积分公式求第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{7.3-10}$$

近似解的方法，而在§4.1 中，我们已经知道，当 λ 取任何值时，逐次逼近过程总是收敛的，如果核 $k(x,t)$、自由项 $f(x)$为连续，则序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在$[a,b^*]$ $(b^*<b)$ 上一致收敛于积分方程(7.3-10)的解，式中 $\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$。

由于对第二类 Volterra 方程来说，当 λ 取任何值时，逐次逼近法总是有效的，因此不妨把 $\lambda k(x,t)$作为核，考虑以下的方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{7.3-11}$$

设此时的逐次逼近序列为$\{\varphi_n(x)\}$，于是

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{7.3-12}$$

式(7.3-12)右端的积分亦可用数值积分公式来求出它的近似值。

记 $\varphi_{n,m}=\varphi_n(x_m)$，$f_{2m}=f(x_{2m})$，利用 Simpson 公式，可得到近似式

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1,2m}=&f_{2m}+\frac{h}{3}(k_{2m,0}\varphi_{n,0}+4k_{2m,1}\varphi_{n,1}+2k_{2m,2}\varphi_{n,2}+4k_{2m,3}\varphi_{n,3}+\\&2k_{2m,4}\varphi_{n,4}+\cdots+k_{2m,2m}\varphi_{n,2m})\quad(m=1,2,\cdots)\\&(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{7.3-13}$$

式中 $$k_{i,j}=k(x_i,x_j),x_j=a+jh,h=\frac{x_{2m}-a}{2m}$$

对奇数 l，通过二次抛物线上三个点的二次插值，得到

$$\varphi_{n,l}=\frac{1}{8}(3\varphi_{n,l-1}+6\varphi_{n,l+1}-\varphi_{n,l+3}) \tag{7.3-14}$$

更精确地，通过三次抛物线上四个点的三次插值，可得

$$\varphi_{n,l}=\frac{1}{16}(5\varphi_{n,0}+15\varphi_{n,2}-5\varphi_{n,4}+\varphi_{n,6}) \tag{7.3-15}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{n,l}=&\frac{1}{16}(-\varphi_{n,l-3}+9\varphi_{n,l-1}+9\varphi_{n,l+1}-\varphi_{n,l+3})\\&(l=3,5,7,\cdots)\end{aligned} \tag{7.3-16}$$

如果按式(7.3-13)计算，只能求出 $x=x_{2k}$点处 $\varphi(x)$的值$(k=0,1,\cdots,p)$。为了算出 $\varphi_{n,2p-1}$，$\varphi_{n,1}$，可以分别利用式(7.3-16)及式(7.3-15)。

例 7.3.2 求一个与传输系统有关的积分方程

$$s(t)=A(0)\varphi(t)-\int_0^t\varphi(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2-53}$$

的近似解，式中 $s(t)\equiv 1$

$$A(t)=1+\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{2t}\quad\left(A(0)=\frac{1}{2}\right) \tag{1.2-55}$$

解　此时 $A'(t)=\frac{1}{2t^2}[1-(1+t)e^{-t}]$，而式(7.3－12)为

$$\varphi_{n+1}(t)=2-\int_0^t \varphi_n(\tau)A'(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

为了用式(7.3－13)进行计算，先列出 $A'(t)$，$2A'(t)$，$4A'(t)$的表(见表 7－3)。

表 7－3　$A'(t)$,$2A'(t)$,$4A'(t)$的计算表

t	$A'(t)$	$2A'(t)$	$4A'(t)$
0	0.25		
0.1	0.2339420		0.9357680
0.2	0.2190388	0.4380775	
0.3	0.2052018		0.8208070
0.4	0.1923498	0.3846996	
0.5	0.1804080		0.7216321
0.6	0.1693075	0.3386149	
0.7	0.1589847		0.6359387
0.8	0.1493812	0.2987623	
0.9	0.1404430		0.5617720
1	0.1321206		

按问题的条件，$\varphi_n(0)=2$．因此取初始近似函数 $\varphi_0(t)=2$。在求 $\varphi_1(t)$时，利用 Simpson 公式把积分用公式代替，于是可得到前 5 次近似 $\varphi_i(t)$的表(步长为 0.1)，其中还列出了由插值得到的中间值(见表 7－4)。

为了进行比较，还求出了当步长为 0.2 时，同一问题的近似解(见表 7－5)。

以下介绍应用幂级数展开来解积分方程(7.3－10)的方法。

设 $k(x,t)$及 $f(x)$是 x 的解析函数，当 $x-a$ 很小时，借助于 Taylor 级数展开式

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{7.3－17}$$

表 7－4　$\varphi_i(t)$计算表($h=0.1$)

t	simpson 和	$\varphi_1(t)$	$\varphi_2(t)$	$\varphi_3(t)$	$\varphi_4(t)$	$\varphi_5(t)$
0		2	2	2	2	2
0.1		1.90327	1.90570	1.905678	1.9056807	1.9056798
0.2	2.8096	1.81269	1.821848	1.821544	1.8215509	1.8215506
0.3		1.7279	1.74758	1.746590	1.7466253	1.7466246
0.4	5.2740	1.6484	1.68200	1.679808	1.6799182	1.6799139
0.5		1.5739	1.6242	1.62008	1.620334	1.620323
0.6	7.4406	1.5040	1.5734	1.56672	1.567216	1.567186
0.7		1.4383	1.5290	1.51884	1.519711	1.519650
0.8	9.3499	1.3767	1.4904	1.47590	1.477304	1.477192
0.9		1.3188	1.4569	1.4373	1.43940	1.439207
1	11.0364	1.2642	1.4280	1.4023	1.40539	1.405090

表 7-5　$\varphi_i(t)$计算表($h=0.2$)

t	$\varphi_1(t)$	$\varphi_2(t)$	$\varphi_3(t)$	$\varphi_4(t)$	$\varphi_5(t)$	$\varphi_6(t)$
0	2	2	2	2	2	2
0.2	1.8130	1.82252	1.822411	1.822416	1.822404	
0.4	1.6484	1.68197	1.679733	1.679821	1.6798168	1.6798184
0.6	1.5038	1.5730	1.56616	1.566639	1.566618	
0.8	1.3767	1.4903	1.47588	1.477292	1.477183	1.477191
1	1.264	1.4277	1.40196	1.40510	1.40480	
1.2	1.165	1.3824	1.34198	1.34780	1.34712	1.347187
1.4	1.076	1.351	1.2923	1.30202	1.30069	
1.6	0.998	1.329	1.2493	1.26439	1.26208	1.262379

常常可以方便地求出未知函数$\varphi(x)$的值来。为此，对式(7.3-10)逐次求导，就可以通过低阶导数，依次求出$\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$，…

$$\begin{cases}\varphi'(x)=f'(x)+k(x,x)\varphi(x)+\displaystyle\int_a^x\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ \varphi''(x)=f''(x)+\dfrac{\mathrm{d}k(x,x)}{\mathrm{d}x}\varphi(x)+k(x,x)\varphi'(x)+\\ \qquad\dfrac{\partial k(x,x)}{\partial x}\varphi(x)+\displaystyle\int_a^x\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ \cdots\end{cases}\tag{7.3-18}$$

再由

$$\frac{\mathrm{d}k(x,x)}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=x}$$

再在式(7.3-10)及式(7.3-18)中令$x=a$，就可得到为了确定表达式式(7.3-17)右端所需要的$\varphi(x)$在$x=a$的各阶导数值

$$\varphi(a)=f(a)$$

$$\varphi'(a)=f'(a)+k(a,a)\varphi(a)$$

$$\varphi''(a)=f''(a)+k(a,a)\varphi'(a)+\left[2\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\right]\Bigg|_{\substack{x=a\\t=a}}\cdot\varphi(a)$$

§7.4　待定系数（逼近）法

待定系数法，亦称为**展开法**。它的基本想法是，把 Fredholm 方程的解$\varphi(x)$，用由n个在$[a,b]$上连续的线性无关的函数$u_k(x)$的和式

$$\varphi^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_ku_k(x)\tag{7.4-1}$$

来逼近，只要确定了系数a_k，近似解$\varphi(x)$就可以确定。a_k的值可以这样确定，使式(7.4-1)在区间$[a,b]$上(在某种意义下)尽可能近似地满足原方程。这种方法可用于第二类 Fredholm 方程，也可用于第一类 Fredholm 方程。在(7.4-1)式中，$\varphi^{(n)}(x)$的上标(n)不表示求n阶导数。

对于第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \tag{7.4-2}$$

把式(7.4-1)代入，就有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x) - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k\int_a^b k(x,t)u_k(t)\mathrm{d}t - f(x) = r(x) \tag{7.4-3}$$

只要能确定系数 a_k，由式(7.4-1)就可以得到方程(7.4-2)的近似解 $\varphi^{(n)}(x)$。

a_k 的值可以这样来确定：式(7.4-3)乘以权函数 $v_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$，使得对每个 k，$r(x)$与 $v_k(x)$的内积都是零。当选取 $v_k(x)=\delta(x-x_k)$，称为**配置法**；当设 $v_k(x)=x^k(k=1,2,\cdots,n)$，称为**矩量法**；当设权函数 $v_k(x)=\omega(x)u_k(x)$，式中 $\omega(x)$是适当的权因子，称为 **Galerkin 法**(有时把上述两种方法统称为矩量法)。在最后一种情况，常常选取在$[a,b]$上关于$\omega(x)$正交的函数系作为$\{u_k(x)\}$。如果 $u_k(x)$选取得适当，即它能刻划积分方程解的重要特征，则用 Galerkin 法往往能够求出结果。

1. 配置法

在$[a,b]$适当选取 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$($x_i$ 称为**配置点**)，使式(7.4-3)左端在 $x=x_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$都等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x_i) - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k\int_a^b k(x_i,t)u_k(t)\mathrm{d}t - f(x_i) = 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

式(7.4-4)是以 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$为未知数的线性代数方程组，如果它的解 a_k 存在，求出后代入式(7.4-2)，就得到方程(7.4-1)的近似解。

例 7.4.1 用配置法解对称核方程

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + x \tag{7.4-5}$$

式中
$$k(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & (x\leqslant t) \\ t(1-x) & (x>t)\end{cases}$$

解 设方程(7.4-5)的近似解

$$\varphi^{(3)}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

即设 $u_1(x)=1$，$u_2(x)=x$，$u_3(x)=x^2$，于是

$$\int_0^1 k(x,t)u_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t(1-x)\cdot 1\mathrm{d}t + \int_x^1 x(1-t)\cdot 1\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x(1-x)$$

$$\int_0^1 k(x,t)u_2(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t(1-x)t\mathrm{d}t + \int_x^1 x(1-t)t\mathrm{d}t = \frac{1}{6}x(1-x^2)$$

$$\int_0^1 k(x,t)u_3(t)\mathrm{d}t = \int_0^x t(1-x)t^2\mathrm{d}t + \int_x^1 x(1-t)t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{12}x(1-x^3)$$

取 $x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=1$，则式(7.4－4)成为

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot \frac{1}{2} + a_3 \frac{1}{2^2} - \left[a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{6} \right. \\ \qquad \left. \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + a_3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \right] = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \frac{7}{8}a_1 + \frac{7}{16}a_2 + \frac{41}{192}a_2 = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$

解之，得

$$a_1 = 0, a_2 \approx 1.279\ 1, \quad a_3 \approx -0.279\ 1$$

因此，方程(7.4－5)的近似解为

$$\varphi^{(3)}(x) = 1.279\ 1x - 0.279\ 1x^2$$

它的精确解为

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$$

配置法亦可用来求第一类 Fredholm 方程或非线性积分方程的近似解。

2. Galerkin 法

Galerkin 法亦称为**矩量法**，是待定系数逼近法的一种，利用它可以求第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \qquad (7.4-2)$$

的近似解。

设上述积分方程的近似解为(7.4－1)，且设 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$，…是在 $L_2(a,b)$ 内完备的、标准正交的函数系。系数 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$这样来确定，使得式(7.4－3)两端与上述函数系中的前 n 个函数 $u_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$在$[a,b]$上正交(当取 $u_k(x)=x^k(k=0,1,\cdots,n-1)$就是矩量法)。于是要求系数 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$满足下列线性方程组

$$(\varphi^{(n)}(x),u_k(x)) = \lambda\left(\int_a^b k(x,t)\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}t, u_k(x)\right) + (f(x),u_k(x))$$
$$(k = 1,2,\cdots,n) \qquad (7.4-6)$$

式中　符号(…,…)表示内积，即 $(f(x),g(x)) \equiv \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，而 $\varphi^{(n)}(x)$由式(7.4－1)表示。

如果(7.4－2)式中 λ 的值不是特征值，则对充分大的 n，方程组(7.4－6)单值可解，且当 $n\to\infty$时，由式(7.4－1)确定的近似解(在 $L_2(a,b)$的度量下)平方平均收敛于方程(7.4－2)的精确解。

例 7.4.2　用 Galerkin 法解方程

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{1} xt\varphi(t)\mathrm{d}t + x \tag{7.4-7}$$

解 选取 Legendre 多项式 $P_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$作为$[-1,1]$上完备的函数系。

以下寻求方程(7.4－7)形如

$$\varphi^{(3)}(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \frac{3x^2-1}{2}$$

的近似解，式中 $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$。用 $\varphi^{(3)}(x)$代替方程(7.4－7)中的$\varphi(x)$，就有

$$a_1 + a_2x + a_3\frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2t + a_3\frac{3t^2-1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= x + \frac{2}{3}a_2x \tag{7.4-8}$$

上式两端依次乘以 1、x、$\dfrac{3x^2-1}{2}$并关于 x 在$[-1,1]$积分，得到

$$2a_1 = 0,\quad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2,\quad \frac{2}{5}a_3 = 0$$

于是 $a_1=0$，$a_2=3$，$a_3=0$(上述结果亦可直接从式(7.4－8)得出)，因此，$\varphi^{(3)}(x)=3x$。不难验证，$3x$ 是原方程(7.4－7)的精确解。

对于退化核方程，Galerkin 法给出精确解，以下例子就说明这一点。对一般核的方程，Galerkin 法等价于把核用退化核代替的方法。

3. 最小二乘法

在用最小二乘法寻求积分方程(7.4－2)的、形如(7.4－1)的近似解 $\varphi^{(n)}(x)$时，要求坐标函数系$\{u_n(x)\}$满足的条件与 Galerkin 法一样，而系数 a_k 应这样选取，使得

$$\int_a^b \left|\varphi^{(n)}(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x \tag{7.4-9}$$

取最小值。

由条件(7.4－9)可得，a_k 应满足线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(Au_k, Au_i) = (f, Au_i)\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7.4-10}$$

式中 $Au = u(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t$。

更详细地，方程组(7.4－10)的系数与自由项可写成

$$(Au_k, Au_i) = \int_a^b u_k(x)\,\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x -$$

$$2\mathrm{Re}\left\{\lambda\int_a^b\int_a^b k(x,t)u_k(t)\,\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\} +$$

$$|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b\int_a^b k(x,t)\,\overline{k(x,s)}u_k(t)u_i(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$(f, Au_i) = \int_a^b f(x)\,\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x - \bar{\lambda}\int_a^b\int_a^b \overline{k(x,t)}f(x)u_i(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

如果所给的 λ 不是核 $k(x,t)$的特征值，则方程组(7.4－10)对任意 n 可解，且 $\varphi^{(n)}(x)$平方

平均收敛于 $\varphi(x)$，式中 $\varphi(x)$是方程(7.4－2)的解；如果近似解 $\varphi^{(n)}(x)$已求出，则它的误差有以下估计

$$\|\varphi^{(n)}-\varphi\| = \sqrt{\int_a^b |\varphi^{(n)}(x)-\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x}$$
$$\leqslant M\left\|\varphi_n - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}t - f\right\|$$

式中 M 为常数

当 λ 是核 $k(x,t)$的特征值时，齐次积分方程

$$Au \equiv u(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)u(t)\mathrm{d}t = 0$$

具有非零解，其中线性无关的解只有有限个。把它们记为 $\omega_1(x)$，$\omega_2(x)$，…，$\omega_p(x)$，它们的个数与共轭齐次方程线性无关解的个数相同。

积分方程(7.4－2)可解的充要条件是 $f(x)$与共轭齐次方程的所有解正交。而如果上述条件成立，则方程(7.4－2)具有无限个解，其中有一个且只有一个与 $\omega_1(x)$，$\omega_2(x)$，…，$\omega_p(x)$都正交。

如果上述函数 $\omega_i(x)(i=1,2,\cdots,p)$已知，则以上所述的解可以由最小二乘法求出。为此，取坐标函数，并取 $n>p$，且设

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$$

使得
$$(\varphi^{(n)},\omega_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k(u_k,\omega_j) = 0 \quad j=1,2,\cdots,p$$

利用以上这些关系式，把 p 个系数 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$通过其余的系数表示出来。再按使 $\|Au_n - f\|^2$ 取最小值这一要求，由所导出的线性代数方程组，就可以把其余 $n-p$ 个系数 a_k 求出来。

4. 用展开法解第一类 Fredholm 方程

对第一类 Fredholm 方程

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{7.4－11}$$

设 $k(x,t)$，$\varphi(t)$，$f(x)$都可以展开为正交函数系$\{u_k(x)\}$的级数：

$$k(x,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}u_k(x)u_l(t) \tag{7.4－12}$$

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(t) \tag{7.4－13}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x) \tag{7.4－14}$$

由于函数 $u_k(x)$在区间$[a,b]$正交，即

$$\int_a^b u_k(x)u_l(x)\mathrm{d}x = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

把式(7.4－12)、(7.4－13)、(7.4－14)代入式(7.4－11)，得到

$$\int_a^b \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}u_k(x)u_l(t) \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(t)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}c_l u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x)$$

于是就有无限线性方程组

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}c_l = b_k$$

式中　系数 c_l 由已知数 a_{kl} 与 b_k 确定。

若求和到数 n 为止，就得到线性方程组

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}c_l = b_k$$

从中解出 c_l，由式(7.4－13)就可得出方程(7.4－11)的解 $\varphi(x)$。

在一系列情况下，由方程组(7.4－6)确定系数 a_k 的问题，等价于求某个泛函的极小值问题。用 Ritz 法解此变分问题，与 Galerkin 法得到的结果相同。

§7.5　求对称核特征值与特征函数的近似方法

用 Hilbert-schmidt 方法解对称核积分方程；需要确定核的特征值与特征函数，这通常用近似方法得到。

1. 用 Ritz 方法求第一特征值

由定理 3.10.1，对称核方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{7.5-1}$$

(其中 $k(x,t)=k(t,x)$)的第一特征值 λ_1 的绝对值的倒数 $\frac{1}{|\lambda_1|}$ 是在条件

$$\| p \| = (p,p) = \int_a^b p^2(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{7.5-2}$$

下，$|(Kp,p)| = \left|\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)p(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|$ 的极大值，式中 $Kp = \int_a^b k(x,t)p(t)\mathrm{d}t$。由此定理，第一特征值(的绝对值)可以用变分方法求出，特别是，可以用以下的 Ritz 方法得到。

选取在[a,b]上标准正交的函数系 $\{u_k(x)\}$，$u_k(x)\in L_2(a,b)$，使得 $\{u_k(x)\}$ 在 $L_2(a,b)$ 完备，即对任意正数 ϵ，对于任意标准化的平方可积函数 $f(x)$ 总可以选取一个正整数 n 和系数 a_1，a_2，…，a_n，使得

$$\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x) \| < \epsilon$$

成立，即函数 $f(x)$ 可以用 $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$ 近似，所引起的平方平均误差是一个任意小的正数。

为了求第一特征值 λ_1，设

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x) \tag{7.5-3}$$

式中系数 a_k 这样选取，使得在满足

$$\| \varphi^{(n)} \| = 1 \tag{7.5-4}$$

的条件下，$\varphi^{(n)}(x)$是使泛函

$$(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)}) = \int_a^b\int_a^b k(x,t)\varphi^{(n)}(x)\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.5-5}$$

的绝对值取极大值，且是与特征值 λ_1 对应的特征函数 φ_1 的近似函数；所求出的极大值是核 $k(x,t)$的第一特征值绝对值的倒数$\frac{1}{|\lambda_1|}$的近似值。可以证明，所得到的近似特征值不小于真值，且当 $n\to\infty$时趋于真值。

定理 7.5.1 设实对称核方程(7.5－1)的第一特征值为 λ_1,泛函(7.5－5)的绝对值在满足条件(7.5－4)下的极大值的倒数为 $\lambda_1^{(n)}$，则 $\lambda_1^{(n)}\geqslant|\lambda_1|$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}=|\lambda_1|$。

证明 设形如(7.5－3)的函数 $\varphi^{(n)}(x)$使泛函(7.5－5)的绝对值在条件(7.5－4)下取得极大值，则有

$$\frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = |(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)})| \leqslant \max_{\|p\|=1}|(Kp,p)| = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

所以 $\lambda_1^{(n)}\geqslant|\lambda_1|$。下面再证$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}=|\lambda_1|$。

由于序列$\{u_n(x)\}$是完备的，所以对于 λ_1 所对应的标准化的特征函数 $\varphi_1(x)$及任意的 $\varepsilon>0$，存在形如 $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$ 的函数，a_k 为常数，使

$$\| \varphi_1 - \psi_n \| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.5-6}$$

再设

$$\psi_n^{(0)}(x) = \frac{\psi_n(x)}{\| \psi_n \|}$$

于是 $\psi_n^{(0)}$ 满足条件(7.5－2)。

以下来估计$\| \varphi_1-\psi_n^{(0)} \|$。由三角不等式，有

$$\| \varphi_1 \|-\| \psi_n \|\leqslant\| \varphi_1 - \psi_n \|< \frac{\varepsilon}{4},\text{即 } 1 -\| \psi_n \|< \frac{\varepsilon}{4}$$

因此

$$\| \psi_n \|> 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

由三角不等式及式(7.5－6)

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} <\| \varphi_1 \|-\| \varphi_1 - \psi_n \|\leqslant\| \psi_n \|\leqslant\| \varphi_1 \|+\| \varphi_1 - \psi_n \|< 1 + \frac{\varepsilon}{4}$$

记 $\sigma=\| \psi_n \|$，就有

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.5-7}$$

及

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma < 1 + \frac{\varepsilon}{4}$$

即

$$|1 - \sigma| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.5-8}$$

而由式(7.5－7)

$$\|\varphi_1-\psi_n^{(0)}\|=\left\|\varphi_1-\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}\right\|=\left\|\frac{\sigma\varphi_1-\psi_n}{\sigma}\right\|=\frac{\|\sigma\varphi_1-\psi_n\|}{\sigma}<\frac{\|\sigma\varphi_1-\psi_n\|}{1-\frac{\varepsilon}{4}}$$

取 ε 足够小，使 $1-\frac{\varepsilon}{4}>\frac{1}{2}$，再由式(7.5－8)

$$\|\varphi_1-\psi_n^{(0)}\|<2\|\sigma\varphi_1-\psi_n\|$$

$$=2\|\varphi_1-\psi_n-(1-\sigma)\varphi_1\|\leqslant 2\|\varphi_1-\psi_n\|+2|1-\sigma|<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon \qquad (7.5-9)$$

以下估计

$$D=|(K\varphi_1,\varphi_1)|-|(K\psi^{(0)},\psi^{(0)})|$$

由定理 3.10.1，$D>0$。而由三角不等式

$$D\leqslant|(K\varphi_1,\varphi_1)-(K\psi_0^{(0)}-\psi_n^{(0)})|$$

由于 $(K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}),\varphi_1-\psi_0^{(0)})=(K\varphi_1,\varphi_1)-(K\varphi_1,\psi_n^{(0)})+(K\psi_n^{(0)},\varphi_1)-(K\psi_n^{(0)},\psi_n^{(0)})$

且核为对称核，$k(x,t)=k(t,x)$，因此

$$(K\varphi_1,\psi_n^{(0)})=(\varphi_1,K\psi_n^{(0)})=(K\psi_n^{(0)},\varphi_1)$$

所以 $|(K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}],\varphi_1-\psi_n^{(0)})|=|(K\varphi_1,\varphi_1)-(K\psi_n^{(0)},\psi_n^{(0)})|\geqslant D$

再由 Bunyakovskii-Schwarz 不等式及式(7.5－9)

$$D^2\leqslant\|K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}]\|^2\|\varphi_1-\psi_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2\|K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}]\|^2 \qquad (7.5-10)$$

但

$$\|\varphi_1+\psi_n^{(0)}\|\leqslant\|\varphi_1\|+\|\psi_n^{(0)}\|=2 \qquad (7.5-11)$$

而

$$\|K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}]\|^2=\int_a^b\left|\int_a^b k(x,t)[\varphi_1(t)+\psi_n^{(0)}(t)]\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x \qquad (7.5-12)$$

再由 Bunyakovskii-schwarz 不等式及式(7.5－11)

$$\left|\int_a^b k(x,t)[\varphi_1(t)+\psi_n^{(0)}(t)]\mathrm{d}t\right|^2\leqslant$$

$$\int_b^a k^2(x,t)\mathrm{d}t\int_a^b[\varphi_1(t)+\psi_n^{(0)}(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant 4\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t$$

代入式(7.5－12)，就得到

$$\|K[\varphi_1+\psi_n^{(0)}]\|^2\leqslant 4\int_a^b\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=4B^2$$

式中 B 由式(7.3－3)定义。再由式(7.5－10)，得

$$D<2B\varepsilon \qquad (7.5-13)$$

由于函数 $\varphi^{(n)}$ 在条件(7.5－3)下使泛函(7.5－5)的绝对値取极大值，因此

$$|(K\varphi_1,\varphi_1)|\geqslant|(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)})|\geqslant|(K\psi_n^{(0)},\psi_n^{(0)})|$$

所以

$$\frac{1}{|\lambda_1|}-\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}=|(K\varphi_1,\varphi_1)|-|(K\psi_n^{(0)},\psi_n^{(0)})|=D$$

但由式(7.5－13)，D 可以任意小，因此

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{(n)}=|\lambda_1|$$

对于由式(7.5－3)定义的 $\varphi^{(n)}(x)$，有

$$\|\varphi^{(n)}\| = (\varphi^{(n)},\varphi^{(n)}) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k u_k(x),\sum_{k=1}^{n}a_k u_k(x)\right) = \sum_{i,k=1}^{n}a_i a_k(u_i,u_k)$$

由于$\{u_k(x)\}$是标准正交系，于是由式(7.5－4)得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 = 1 \tag{7.5-14}$$

而

$$|(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)})| = \left|\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_i a_k\right| \tag{7.5-15}$$

式中
$$A_{ik} = \int_a^b\int_a^b k(x,t)u_i(x)u_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

由于 $k(x,t)$为对称核，因此 $A_{ik}=A_{ki}$。

在条件(7.5－14)下求(7.5－15)的极大值，是以 a_1，a_2，…，a_n 为自变数的多元函数的一个条件极值问题。

当 $k(x,t)$是正定核，即$(K\varphi,\varphi)>0$，则问题进一步化为在条件(7.5－14)下求二次型

$$(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)}) = \sum_{i,k=1}A_{ik}a_i a_k \tag{7.5-16}$$

的极大值，此时所求出的特征值的近似值都是正数。

上述二次型的条件极值问题，可以用 **Lagrange 乘数法**来解。为此，记

$$F = \sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_i a_k,\qquad \Phi = F - \sigma\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2 - 1\right)$$

式中　σ 是待定乘数。

解方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i} - 2\sigma a_i = 0\quad(i = 1,2,\cdots,n)$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ik}a_k - \sigma a_i = 0\quad(i = 1,2,\cdots,n) \tag{7.5-17}$$

由于 a_i 要满足条件$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$，于是$a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零，因此 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$是线性代数方程组(7.5－17)的非零解。

为了使齐次方程组(7.5－17)有非零解，它的系数行列式应该等于零，即

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\sigma & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22}-\sigma & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{7.5-18}$$

用 a_i 乘以式(7.5－17)，并关于 i 从 1 到 n 求和，由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 = 1$，就得到 $\sigma=F$。

显然，$F=\sigma$ 是在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 = 1$ 下，$F = \sum\limits_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_i a_k$ 的极大值，它就是 σ 的 n 次代数方程(7.5－18)的最大根。

在求出特征值的同时，求它对应的特征函数也很重要，只是这个问题比确定特征值的问题困难得多。但是，如果预先能断定所求出的特征值对应的特征函数是惟一的，则问题的解

决就较简单。此时，可先求出方程(7.5-18)的根σ，然后解齐次代数方程组(7.5-17)，把所求出的a_1，a_2，…，a_n代入表达式(7.5-3)，就得到所要求的特征函数的近似表达式。

例 7.5.1 用 **Ritz** 法求核$k(x,t)=xt$；$a=0$，$b=1$的第一特征值的近似值。

解 选取 **Lagendre 多项式组**$\left\{\dfrac{P_k(2x-1)}{\|P_k(2x-1)\|}\right\}$作为$u_k(x)$(称为**坐标函数系**)

$$P_0(2x-1)=1 \quad \|P_0(2x-1)\|^2=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$$

于是 $u_1(x)=1$

而 $P_1(2x-1)=2x-1,\|P_1(2x-1)\|^2=\int_0^1(2x-1)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$

于是 $u_2(x)=\sqrt{3}(2x-1)$

这样，设

$$\varphi^{(2)}(x)=a_1u_1(x)+a_2u_2(x)=a_1+a_2\sqrt{3}(2x-1)$$

从而

$$A_{11}=\int_0^1\int_0^1 xt\cdot 1\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$$

$$A_{12}=\int_0^1\int_0^1 xt\cdot 1\cdot\sqrt{3}(2t-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$A_{21}=A_{12}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$A_{22}=\int_0^1\int_0^1 xt\cdot\sqrt{3}(2x-1)\cdot\sqrt{3}(2t-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{12}$$

此时方程(7.5-18)为

$$\begin{vmatrix}\dfrac{1}{4}-\sigma & \dfrac{\sqrt{3}}{12}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{12} & \dfrac{1}{12}-\sigma\end{vmatrix}=0$$

即

$$\sigma^2-\frac{1}{3}\sigma=0$$

所以

$$\sigma_1=\frac{1}{3},\sigma_2=0$$

因此第一特征值λ_1的近似值为$\dfrac{1}{1/3}=3$，实际上xt的特征值的真值也是3。

2. 确定下一个特征值的方法

对称核$k(x,t)$的特征值λ_2(更一般的为λ_{n+1})的绝对值，可以用定理3.10.2等求出，也可以利用下述定理得到：

定理 7.5.2 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$是对称核$k(x,t)$的特征值，对应的特征函数$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$、…，$\varphi_n(x)$，…构成标准正交系，则$\lambda_{n+1}$是核

$$k^{(n)}(x,t)=k(x,t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

(绝对值)最小的特征值；$\varphi_{n+1}(x)$是核$k^{(n)}(x,t)$的与λ_{n+1}对应的特征函数。

利用上述定理，求核 $k(x,t)$ 的特征值 λ_{n+1} 的问题，化为求 $k^{(n)}(x,t)$ 的第一特征值，这可由上述 Ritz 方法得到。

实际上用以上所述的几个定理是存在困难的，因为通常不能确定精确度较高的特征函数。

为了确定从 λ_2 起的所有特征值，可以用核的迹而不是用特征函数来确定它们。

3. 用核的迹求特征值的近似值

在 § 3.1 中，已经用式(3.1－4)，即

$$A_n=\int_a^b k_n(x,x)\mathrm{d}x$$

定义了核 $k(x,t)$ 的 n 次迹，式中 $k_n(x,t)$ 为 $k(x,t)$ 的 n 次迭核。

核 $k(x,t)$ 的第一特征值 λ_1，可以利用核的迹求出。

可以证明，成立下列不等式

$$|\lambda_1|=\sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}}\quad (n=1,2,\cdots)$$

若每个特征值只对应一个特征函数，则对充分大的 n，近似地成立

$$|\lambda_1|\geqslant (A_{2n})^{-1/2n}$$

此外，还可证明

$$\lambda_1^2=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{A_{2n}}}$$

式中 A_{2n} 为核 $k(x,t)$ 的 $2n$ 次迹；对于充分大的正整数 n，成立下列近似公式

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+2}}}\tag{7.5－19}$$

上式右端给出 $|\lambda_1|$ 的一个过剩近似值；

且成立

$$|\lambda_1|=\frac{\sqrt[2n]{r}}{\sqrt[2]{A_{2n}}}\tag{7.5－20}$$

上式右端给出 $|\lambda_1|$ 的一个不足近似值，式中 r 是特征值 λ_1 的重数。

第二特征值 λ_2 的绝对值也可利用核的迹来求。

由于 $A_{2n}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{2n}}$（见文献[6]）

$$B_{2n}\equiv A_{2n}^2-A_{4n}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{2n}}\right)^2-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{4n}}=2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{1\leqslant m<k}\frac{1}{\lambda_m^{2n}\lambda_k^{2n}}$$

设 λ_1、λ_2 都是单特征值，且 $-\lambda_1$、$-\lambda_2$ 都不是特征值。当 n 充分大时，可使上列和式的第一项 $\frac{1}{\lambda_1^{2n}\lambda_2^{2n}}$ 大于其他项，而其余项与此项相比可以略去，于是得到近似式

$$\frac{1}{\lambda_1^{2n}\lambda_2^{2n}}\approx\frac{B_{2n}}{2}$$

由此可得到以下近似式

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt[2n]{\frac{2}{B_{2n}}} \tag{7.5-21}$$

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt{\frac{B_{2n}}{B_{2n+2}}} \tag{7.5-22}$$

如果已知 λ_1 的真值，则式(7.5－21)给出 $|\lambda_2|$ 的不足近似值。而式(7.5－22)给出 $|\lambda_2|$ 的过剩近似值。

与(7.5－21)、(7.5－22) 这两个近似式相应，有以下极限形式的公式

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{B_{2n}}} = \frac{1}{|\lambda_1|}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{B_{2n}}{B_{2n+2}}}$$

利用上述方法，可以不用特征函数而是用核的迹，来确定从第二特征值起的所有特征值的近似值。当 $n=1$ 及 $n=2$ 时，特征值的近似值的误差只有百分之几。

类似地，还成立

$$\lambda_3 \approx \frac{1}{|\lambda_1^2\lambda_2|}\sqrt[2n]{\frac{8}{B_{2n}^2 - 2B_{4n}}}$$

对称核 $k(x,t)$ 的偶数级的迹，可以用式(3.1－8)即

$$A_{2n} = \int_a^b\int_a^b k_n^2(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x$$

或

$$A_{2n} = \int_a^b\int_a^x k_n^2(x,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}x \tag{7.5-23}$$

来计算。

例 7.5.2 用求迹的方法，计算核

$$k(x,t) = \begin{cases} t & (x \geqslant t) \\ x & (x \leqslant t) \end{cases} \quad 0 \leqslant x,t \leqslant 1$$

的第一特征值的近似值。

解 由于 $k(x,t)$ 是对称核，因此只要对 $t<x$ 求 $k_2(x,t)$ 就可以了。

$$\begin{aligned} k_2(x,t) &= \int_0^1 k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u + \\ &\quad \int_t^x k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u + \int_x^1 k(x,u)k(u,t)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

而当 $u<t$ 时， $k(x,u) = u, k(u,t) = u$

当 $t<u<x$ 时， $k(x,u) = u, k(u,t) = t$

当 $x<u$ 时，由于 $t<x$，因而 $t<u$，于是

$$k(x,u) = x, \quad k(u,t) = u$$

这样

$$\begin{aligned} k_2(x,t) &= \int_0^t u^2\mathrm{d}u + \int_t^x ut\mathrm{d}u + \int_x^1 xt\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{(x^2-t^2)}{2}t + xt(1-x) = xt - \frac{x^2t}{2} - \frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

由于式(7.5－23)有

$$A_2 = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x k_1^2(x,u)\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{6}$$

$$A_4 = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x k_2^2(x,u)\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \left(xu - \frac{x^2u}{2} - \frac{u^3}{6}\right)^2\mathrm{d}u = \frac{17}{630}$$

由式(7.5－19)

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{1/6}{17/630}} \approx 2.485$$

例 7.5.3 用求迹的方法，求对称核

$$k(x,t) = \begin{cases} -\sqrt{xt}\ \ln t & (x \leqslant t) \\ -\sqrt{xt}\ \ln t & (x \geqslant t) \end{cases} \qquad 0 \leqslant x,t \leqslant 1$$

的第一、第二特征值的近似值。

解 容易求出二次迭核

$$k_2(x,t) = \frac{\sqrt{xt}}{4}[(x^2 + t^2)\ln x + 1 - x^2] \qquad (x \geqslant t)$$

由式(7.5－23)

$$A_2 = \frac{1}{32},\quad A_4 = \frac{11}{12\ 288},\quad B_2 = \frac{1}{12\ 288}$$

由式(7.5－20)

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 5.781\ 3,\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{B_2}} = 27.116$$

实际上所求的第一、第二特征值 λ_1、λ_2 分别是 Bessel 函数 $J_0(x)$的第一、第二个零点的平方，即

$$\lambda_1 = 2.404\ 8^2 = 5.783\ 1,\lambda_2 = 5.520\ 1^2 = 30.472$$

4. Kellogg 方法

对称核的特征值还可以用以下叙述的 **Kellogg 方法**求出。任取 $L_2(a,b)$中的一个任意函数 $Q(x)$，作下列函数序列

$$Q_1(x) = \int_a^b k(x,t)Q(t)\mathrm{d}t$$

$$Q_2(x) = \int_a^b k(x,t)Q_1(t)\mathrm{d}t$$

……

$$Q_n(x) = \int_a^b k(x,t)Q_{n-1}(t)\mathrm{d}t$$

……

设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$为核 $k(x,t)$的特征值，对应的标准正交特征函数为 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…。且设 $\varphi_k(x)$是特征函数系$\{\varphi_i(x)\}(i=1,2,\cdots)$中第一个不与 $Q(x)$正交的函数，即 $Q(x)$与 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_{k-1}(x)$正交，但与特征函数 $\varphi_k(x)$不正交，即 $\int_a^b Q(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x$

$\neq 0$。

由式(3.4-8)

$$Q_1(x)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{a_i}{\lambda_i^n}\varphi_i(x)\quad(a_k\neq 0)$$

式中　$a_i=(Q,\varphi_i)$是$Q(x)$关于标准正交函数系$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 系数。

重复使用式(3.4-8)，得到

$$Q_n(x)=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{a_i}{\lambda_i^n}\varphi_i(x)$$

由此可得

$$\|Q_n\|=\sqrt{\sum_{i=k}^{\infty}\frac{a_i^2}{\lambda_i^{2n}}}\tag{7.5-24}$$

可以证明

$$|\lambda_k|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|Q_n\|}}\tag{7.5-25}$$

或

$$|\lambda_k|=\lim_{n\to\infty}\frac{\|Q_{n-1}\|}{\|Q_n\|}\tag{7.5-26}$$

利用以上两式可以求第k个特征值λ_k的绝对值，当$k(x,t)$为对称正定核，就能得到λ_k的值。

λ_k的绝对值可以用下列近似公式算出：

$$|\lambda_k|\approx\frac{1}{\sqrt[n]{\|Q_n\|}}\tag{7.5-27}$$

或

$$|\lambda_k|\approx\frac{\|Q_{n-1}\|}{\|Q_n\|}\tag{7.5-28}$$

对于对称正定核，以上两式给出λ_k本身的近似值。式(7.5-28)给出$|\lambda_k|$的过剩近似值。

当函数$Q(x)$选取得合适，通过较简单的计算，就可以求出特征值或它的绝对值的近似值，这是 Kellogg 方法的优点；但这种方法的缺点是，预先不知道能算出的是第几个特征值，且以后的特征值也不能确定。

特别是，当$Q(x)$不与$\varphi_1(x)$正交时，可以用式(7.5-27)及(7.5-18)求出第一特征值绝对值$|\lambda_1|$的近似值，或用式(7.5-25)及(7.5-26)求$|\lambda_1|$的精确值。

例 7.5.4　用 Kellogg 方法求核$k(x,t)=x^2t^2$的第一特征值，$0\leqslant x, t\leqslant 1$。

解　$k(x,t)$的特征函数$\varphi_1(x)$为$\sqrt{5}x^2$，取$Q(x)=x$，则$(Q,\varphi_1)\neq 0$，可依次求出

$$Q_1(x)=\int_0^1 x^2t^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}x^2$$

$$Q_2(x)=\int_0^1 x^2t^2\frac{t^2}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4.5}x^2$$

……

$$Q_n(x)=\frac{1}{4.5^{n-1}}x^2$$

于是

$$\| Q_n(x) \| = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} \sqrt{\int_0^1 (x^2)^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\| Q_{n-1}(x) \| = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-2}} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

由式(7.5－26)

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = 5$$

Kellogg 方法主要用于求对称核之特征函数的近似表达式。在求对称极性核第一特征值及对应的特征函数时，常使用这种方法。

5．用数值积分法求特征值的近似值

对称核方程的特征值的近似值，可以用数值积分法求出来。

例如，对于方程

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \lambda\varphi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{7.5-29}$$

式中
$$k(x,t) = \min(x,t) - \frac{1}{2}xt$$

它的特征值的近似值可以用以下两种方法来求。一种方法是，把方程(7.5－29)化为

$$\int_0^x \left(t - \frac{1}{2}xt\right)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \left(x - \frac{1}{2}xt\right)\varphi(t)\mathrm{d}t = \lambda\varphi(x) \tag{7.5-30}$$

上式求导一次，就有

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \lambda\varphi'(x)$$

再求导一次，得到

$$\lambda\varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \tag{7.5-31}$$

由式(7.5－30)，$\varphi(0)=0$，为使方程(7.5－31)在此定解条件下有非零解，应有 $\lambda>0$，而方程(7.5－31)的非零解为

$$\varphi(x) = C\sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$$

式中 C 为任意常数。

把以上非零解代入原方程(7.5－29)就有

$$\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\int_0^x t\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}t + x\int_x^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{d}t = \lambda\sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$$

再进行分部积分，经计算得

$$\tan\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$$

可求出以上方程的近似解为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 2.028\ 757\ 838\ 1 \quad \lambda_1 = 0.242\ 962\ 685$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=4.913\ 180\ 439\ 4 \quad \lambda_2=0.041\ 426\ 149\ 8$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}=7.978\ 665\ 712 \quad \lambda_3=0.015\ 708\ 671\ 6$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}=11.085\ 538\ 41 \quad \lambda_4=0.008\ 137\ 414\ 1$$

上述特征值的近似值还可以用数值积分法来求。取 $h=\frac{1}{4}$，$k(x,t)$有下列函数表(见表7-6)。

表7-6 $k(x,t)$函数表($h=\frac{1}{4}$)

$x \backslash t$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

对式(7.5-29)令 $x=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$ 并对每一个积分使用Simpson公式来近似，得到 $\varphi\left(\frac{1}{4}\right)$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$，$\varphi\left(\frac{3}{4}\right)$，$\varphi(1)$满足的线性齐次方程组，要使此方程组有非零解，$\mu$必须满足下式

$$\begin{vmatrix} 7-\mu & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6-\mu & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 15-\mu & 3 \\ 4 & 4 & 12 & 4-\mu \end{vmatrix}=0$$

即
$$\mu^4-32\mu^3+208\mu^2-416\mu+256=0$$

解之，得 μ 的近似值为24.053 110，5.004 228，1.666 243，1.276 419。于是，特征值 λ 的近似值为0.250 553，0.052 127，0.017 356 7，0.013 296。

§7.6 求一般核特征值的近似方法

1. 利用递推关系式求特征值的近似值

由于一般核(不一定为对称核)积分方程的特征值是Fredholm行列式(见式(2.3-4))

$$D(\lambda)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}C_m\lambda^m$$

的根，式中 $B_m(x,t)$ 及 C_m 可以利用递推关系式(2.3-15)与(2.3-9)求出。因此，上述递推关系式可以求出前几个系数 C_m，进而求出级数(2.3-4)所对应的部分和——λ 的多项式，此多

项式的根就是所求核的特征值的近似值。但由于C_m的计算比较复杂，所以上述方法在实际上很少使用。

2. 利用核由退化核代替求特征值的近似值

若积分方程的核为退化核

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t)$$

则此核的特征值与矩阵$(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$的特征值一致，式中

$$a_{ij}=\int_a^b b_i(t)a_j(t)\mathrm{d}t \tag{2.2-4}$$

于是确定退化核特征值的问题化为一个代数问题。

这样，如果任何已知核用退化核近似代替，则寻求此已知核特征值的近似值问题，就化为求近似退化核所对应矩阵的特征值。

参 考 文 献

1 Краснов М. Д. и др., Интегральные уравнения, Изд 2-е, Москва: "Наука", 1976

2 Канторович, Д. В. и. др., 高等分析近似方法上册. 北京：科学出版社，1966

3 胡祖炽. 计算方法. 北京：高等教育出版社，1957

4 Baker, C., The Numerical Treatment of Integral Equations, text ed., Oxford, Oxford U press, 1977

5 Delves L M & Walsh J. eds. Computational Methods For Integral Equations. Cambridge: Cambridge U press, 1985

6 米哈林著. 积分方程及其应用，§15

习 题

1. 利用核由退化核代替的方法求下列积分方程的近似解，并对误差进行估计。

(1)$\varphi(x)=e^x-x-\int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2)$\varphi(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+3x-1)+\int_0^1(e^{-xt^2}-1)x\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3)$\varphi(x)=x+\cos x+\int_0^1 x(\sin xt-1)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(4)$\varphi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+\int_0^1(1-\cos xt^2)x\varphi(t)\mathrm{d}t$

2. 用数值积分法求下列方程的近似解。

(1)$\varphi(x)+\int_0^1 xe^{xt}\varphi(t)\mathrm{d}t=e^x$

(2)$\varphi(x)-\int_0^1\frac{x+t}{1+x+t}\varphi(t)\mathrm{d}t=\ln\frac{2+x}{1+x}$

(3)$\varphi(x)+\pi\int_0^1 x^2\cos\pi xt\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t=\pi x(1+\sin\pi x)-2\sin^2\frac{\pi x}{2}$

(4)$\varphi(x)=x+\frac{1}{5}\int_0^x xt\varphi(t)\mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{1+(x-t)^2}\mathrm{d}t = 1$

3. 用逐次逼近法解下列方程并估计误差

(1) $\varphi(x) = 1 + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

式中 $k(x,t) = \begin{cases} t & (x \geqslant t) \\ x & (x \leqslant t) \end{cases}$

(2) $\varphi(x) = x + 4\int_0^1 x^2t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t$

4. 用配置法求下列方程的近似解。

(1) $\varphi(x) = \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + x$ 取 $x=0，0.5，1$

(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\varphi(t)\mathrm{d}t = 2(1-x^2)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$

求形如 $a + bx^2$ 的近似解。

5. 用 Galerkin 法求下列方程的近似解。

(1) $\varphi(x) = 1 - x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) - \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{e}^{xt}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1}(xt + x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^{1}(xt^2 - x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

6. 用 Ritz 法求下列核的第一特征值，设 $0 \leqslant x，t \leqslant 1$

(1) $k(x,t) = x^2t^2$

(2) $k(x,t) = \begin{cases} t & x \geqslant t \\ x & x \leqslant t \end{cases}$

(3) $k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t) & (x \leqslant t) \\ \frac{1}{2}t(2-x) & (x \geqslant t) \end{cases}$

7. 用核的迹求下列核的第一特征值的近似值，设 $0 \leqslant x,t \leqslant 1$。

(1) $k(x,t) = xt$

(2) $k(x,t) = x^2t^2$

(3) $k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t) & (x \leqslant t) \\ \frac{1}{2}t(2-x) & (x \geqslant t) \end{cases}$

8. 用 Kellogg 方法求下列核的第一特征值的近似值。

(1) $k(x,t) = xt$ $(0 \leqslant x,t \leqslant 1)$

(2) $k(x,t) = \sin x\sin t$ $(-\pi \leqslant x,t \leqslant \pi)$

(3) $k(x,t) = \begin{cases} t & (x \geqslant t) \\ x & (x \leqslant t) \end{cases}$ $(0 \leqslant x,t \leqslant 1)$

(4) $k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t) & (x \leqslant t) \\ \frac{1}{2}t(2-x) & (x \geqslant t) \end{cases}$ $(0 \leqslant x,t \leqslant 1)$

第八章　奇异积分方程

如果在积分方程中的积分是积分区间为无限，或者在积分区间上核为无界函数的广义积分，则称这种积分方程为奇异积分方程。例如

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=f(t)$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{2\pi}\varphi(t)\cot\frac{t-x}{2}\mathrm{d}t=f(x)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin(xt)\varphi(t)\mathrm{d}t=F(x)$$

都是奇异积分方程。

在20世纪初，几乎与Fredholm积分方程理论形成的同时，开始建立一维奇异积分方程的理论。早在1873年，俄国数学家Sokhotskii就已讨论了这种方程。后来法国数学家Poincare′及德国数学家Hilbert分别在研究潮汐理论及解析函数边值问题时引出这种方程。

1921年，德国数学家Noether最先对一维奇异积分方程解的理论进行系统的研究，提出了著名的Noether三定理，为奇异积分方程理论的形成奠定了基础。此后，特别在20世纪40年代后，由于奇异积分方程在复变函数论、椭圆型偏微分方程、弹性力学、流体力学及电磁波的平面绕射问题等方面有广泛的应用，于是它迅速得到了进一步的发展，至今，一维奇异积分方程已经具有非常完整的理论。作为解决数学、物理等方面许多问题的有效工具，它正日益发挥出它的作用。

本章简要叙述一维奇异积分方程的基本概念，基本理论及解法，最后对奇异积分方程组及数值解法作简短的介绍。

§8.1　基本概念

1. Cauchy核与Hilbert核

形如

$$K\varphi=a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L}\frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)\tag{8.1-1}$$

的方程，称为**奇异积分方程**，式中L为一条光滑闭曲线，为确定起见，设L包含原点；函数$a(t)$，$f(t)$，$M(t,\tau)$关于各自的自变量属于H类。（定义见本节3）

记
$$b(t)=M(t,t),\ \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t}=k(t,\tau)$$

显然，$b(t)$亦属于H类，且成立

$$|k(t,\tau)|<\frac{A}{|\tau-t|^{1-\lambda}}\quad(0<\lambda\leqslant 1)$$

方程(8.1－1)就化为

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t) \tag{8.1-2}$$

式中 $\frac{1}{\tau-t}$称为 **Cauchy 核**。

例如，解平面偏栅的衍射问题所得到的方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=G(t,T,B_n)$$

(式中$G(t,T,B_n)$是已知函数)以及从含有铁氧体的波导边值问题所导出的方程

$$a(t)\varphi(t)-\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

都是 Cauchy 核奇异积分方程。前者是第一类奇异积分方程，后者是第二类奇异积分方程。以后我们主要讨论第二类奇异积分方程。

形如

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\int_0^{2\pi}k(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=f(s)$$

的方程，称为 **Hilbert 核奇异积分方程**，式中的核 $\cot\frac{\sigma-s}{2}$ 称为 **Hilbert 核**。

设 L 是一条简单、有连续曲率的光滑平面闭曲线，它的参数方程为

$$x=x(s),\quad y=y(s)$$

记 $t=x+iy$，$t(s)=x(s)+iy(s)$，则 L 的方程可记为 $t=t(s)$。设 τ 为 L 上任一点，则存在参数的一个值 σ，使得 $\tau=t(\sigma)$，可证明 Cauchy 核与 Hilbert 核存在关系

$$\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+P(s,\sigma)d\sigma$$

式中 $P(s,\sigma)$为变量 s，σ 的连续函数，且满足以某正数为指数的 Lipschitz 条件。

特别是，当 L 为单位圆，有

$$\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\frac{1}{2}\frac{d\tau}{\tau}$$

利用 Hilbert 核与 Cauchy 核之间的关系，总可以把 Hilbert 核奇异积分方程化为 Cauchy 核奇异积分方程，因此以下仅叙述 Cauchy 核奇异积分方程的理论。由于一维奇异积分方程的理论较完整，结论亦较简单，因此下面主要叙述一维奇异积分方程的理论。

2. 奇异积分算子　特征算子　相联算子　相联齐次方程

在方程

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t) \tag{8.1-2}$$

中，$a(t)$、$b(t)$(称为方程的系数)，$k(t,\tau)$、$f(t)$是已知函数；$\varphi(t)$为未知函数。广义积分理解为在 Cauchy 主值意义下存在，即

$$\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\lim_{\epsilon\to0}\int_{L_\epsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\qquad t\in L$$

式中 $L_\epsilon=L/l_\epsilon$，l_ϵ 表示曲线 L 上的弧 $t't''$，弧 $t't$ 与 tt''的弦长都等于 ϵ，即 $|t'-t|=|t-t''|=\epsilon$。

方程(8.1-2)称为**完整的奇异积分方程**，它除了含有表征奇性的项$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$以外，还含有项$\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$，其中的核$k(t,\tau)$在点$\tau=t$连续或只具有弱奇性，$\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$称为完整方程的**正则部分**。

如果方程不含正则部分，即形如下式的方程

$$K^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{8.1-3}$$

称为方程(8.1-2)所对应的**特征方程**。

K，K°都是算子，前者称为**奇异积分算子**，后者称为**特征算子**。

无论是完整方程还是特征方程，如果自由项$f(t)\equiv 0$，就称为**齐次的**，否则称为**非齐次的**。

把式(8.1-2)$K\varphi$中的奇性部分$\frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\frac{1}{\tau-t}$及正则部分$k(t,\tau)$中的$\tau$与$t$互换，就得到算子$K$的**相联算子$K'$**：

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau-t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.1-4}$$

齐次方程

$$K'\psi = a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau-t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{8.1-5}$$

称为方程(8.1-2)的**相联齐次方程**。

由此还可以得到**特征算子的相联算子$K^{\circ\prime}$**及**相联算子的特征算子K'°**：

$$K^{\circ\prime} \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau-t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.1-6}$$

$$K'^{\circ} \equiv a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{8.1-7}$$

3. 正规性条件　Hölder 条件

如果在L上，函数

$$A(t) = a(t) + b(t), \qquad B(t) = a(t) - b(t)$$

处处不为零，则称算子K、K°、K'，$K^{\circ\prime}$及对应的积分方程为**正规型**的；或称算子或方程的系数满足**正规性条件**。

如果在L上定义的函数$f(t)$满足条件

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant C|t_2 - t_1|^{\alpha}$$

式中　t_1、t_2为L上任意两点，C为正常数，$0<\alpha\leqslant 1$，则称$f(t)$在L上满足指数为α的Hölder条件，或称$f(t)$是**$H(\alpha)$类的函数**。如果不明确要求α的具体数值，可记为$f(t)\in H$。

设在简单有向光滑平面闭曲线L上，复连续函数$G(t)$不为零，则把整数

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \tag{8.1-8}$$

称为函数$G(t)$的**指标**，记为$\kappa=\mathrm{ind}G(t)$。式中$[\quad]_L$表示当t沿曲线L正向绕行一周时，括号内函数的增量。

4. Poincaré-Bertrand 公式

设 L 是光滑闭曲线，$\varphi(\tau,\tau_1)$关于 τ，$\tau_1\in L$ 满足 Hölder 条件，则成立下列 **Poincaré-Bertrand 公式**，在 Cauchy 主值积分交换积分顺序时，要使用它。我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1 \\
&= \varphi(t,t)+\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau
\end{aligned}
\tag{8.1-9}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
&\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1 \\
&= -\pi^2\varphi(t,t)+\int_L d\tau_1\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau
\end{aligned}
\tag{8.1-9'}
$$

特别是，当 $\varphi(\tau,\tau_1)\equiv\varphi(\tau_1)$时，有

$$
\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1 = -\pi^2\varphi(t)
\tag{8.1-10}
$$

5. 奇异算子的指标

整数

$$
\kappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_L
\tag{8.1-11}
$$

称为**算子 K 或方程 $K\varphi=f$ 的指标**。

由上述定义可知，算子 K 的指标仅与算子 K 的特征部分有关。

如果在 L 上 $b(t)\equiv0$，由于 $a(t)-b(t)$及 $a(t)+b(t)$在 L 上都不为零，因此这时 $a(t)$在 L 上处处不为零，此时方程 $K\varphi=f$ 就是通常的第二类 Fredholm 方程。因此，当 $b(t)\equiv0$ 时，把对应的算子 K 称为 Fredholm 算子，由式(8.1-11)立刻得到，Fredholm 算子的指标等于零。

6. Plemelj-Sokhotskii 公式

设 $\varphi(t)\in H(\lambda)$，$t\in L$，L 是光滑闭曲线，分平面为两个区域：D^+ 和 D^-，这里 D^+、D^- 分别为内部区域和外部区域，则成立下列 **Plemelj-Sokhotskii 公式**(见附录 10)

$$
\begin{cases}
\Phi^+(t)=\dfrac{1}{2}\varphi(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \\
\Phi^-(t)=-\dfrac{1}{2}\varphi(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau
\end{cases}
\tag{8.1-12}
$$

或

$$
\begin{cases}
\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \\
\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau
\end{cases}
\tag{8.1-13}
$$

式中 $\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$是 $\Phi(z)$当 z 从 D^+、D^- 趋于 L 上点 t 时的极限值，而 $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$。

不难证明，当 L 是任意的光滑曲线，即 L 是一条非闭的光滑曲线时，只要 $\varphi(t)\in H(\lambda)$，

且 t_0 不是 L 的端点，式(8.1－12)、(8.1－13)就仍然成立。

§8.2 奇异积分方程的解法

1. 特征方程化为解析函数的边值问题

求解特征方程

$$K^\circ\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{8.2-1}$$

可以化为解析函数 **Riemann 问题**的求解(这种方法当 L 为闭围道或非闭弧时均有效)。

设 L 为简单有向光滑的平面闭曲线，它的正向这样选取，使得有限区域总在 L 的左侧，坐标原点在此有限区域内。且设 $a(t)$、$b(t)$、$f(t)$都满足 Hölder 条件，同时 K°，$K^{\circ\prime}$满足正规性条件，即 $a(t)\pm b(t)\neq 0$，并设 $\kappa=\mathrm{ind}[G(t)]$，式中

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \tag{8.2-2}$$

引进由 Canchy 型积分表示的分片全纯函数 $\Phi(z)$，把方程(8.2－1)的解 $\varphi(t)$ 作为下列 Cauchy 型积分的**密度函数**：

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau \tag{8.2-3}$$

由 Plemelj-Sokhotskii 公式(8.1－13)得

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \tag{8.2-4}$$

于是方程(8.2－1)化为分片全纯函数 $\Phi(z)$的下述 Riemann 问题

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{8.2-5}$$

式中 $G(t)$由式(8.2－2)给出，而

$$g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \tag{8.2-6}$$

要指出的是，由式(8.2－3)知，Riemann 问题(8.2－5)的解必须满足附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$。

这样，Riemann 问题(8.2－5)每一个满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的解(由式(8.2－4))对应于方程(8.2－1)的每一个解。反过来也正确，即方程(8.2－1)的每一个解(由(8.2－3)式)对应于 Riemann 问题(8.2－5)满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的解。

求出 Riemann 问题(8.2－5)的解后，由式(8.2－4)即可求出方程(8.2－1)的解 $\varphi(t)$。

2. 特征方程的解

对于特征方程

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t)$$

成立下列结论：

i) 在 $\kappa\geqslant 0$ 时，方程(8.2－2)对任意自由项 $f(t)\in H(L)$在函数类 $H(L)$内可解，且它的所有属于 H 类的解为

$$\varphi(t) = a_*(t)f(t) - \frac{b_*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau - t)}d\tau +$$

$$b_*(t)Z(t)Q_{\kappa-1}(t) \qquad (8.2-7)$$

式中
$$a_*(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad b_*(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \qquad (8.2-8)$$

$$Z(t) = t^{-\kappa/2}\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[\tau^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau - t}d\tau\right\} \qquad (8.2-9)$$

$Q_{\kappa-1}(t)$为次数为$\kappa-1$的任意多项式($Q_{-1}(t)=0$)。

ii) 当$\kappa<0$时，方程(8.2-1)在函数类$H(L)$内可解的充分必要条件是自由项$f(t)$满足下列条件

$$\int_L \frac{f(t)}{Z(t)}t^{k-1}dt = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,-\kappa) \qquad (8.2-10)$$

当以上这些条件成立时，方程(8.2-1)具有惟一的属于H类的解，此解由式(8.2-7)令$Q_{\kappa-1}(t)=0$得到，即

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b_*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau - t)}d\tau \qquad (8.2-11)$$

上述结果可归纳为如下定理：

定理 8.2.1 设方程(8.2-1)满足前述的各项假设，

1) 如果$\kappa>0$，则$K^\circ\varphi=0$恰有κ个线性无关的解$\varphi_k(t)=b_*(t)Z(t)t^{k-1}$，$(k=1,2,\cdots,\kappa)$；

2) 如果$\kappa\leqslant0$，则$K^\circ\varphi=0$没有非零解；

3) 如果$\kappa\geqslant0$，则$K^\circ\varphi=f(t)$对任意自由项$f(t)$有解，且它的一般解线性依赖于κ个任意常数；

4) 如果$\kappa<0$，则当且仅当方程的自由项$f(t)$满足以下$-\kappa$个条件时

$$\int_L \psi_k(t)f(t)dt = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,-\kappa) \qquad (8.2-12)$$

式中
$$\psi_k(t) = \frac{1}{Z(t)}t^{k-1}$$

$K^\circ\varphi=f(t)$有惟一解，它由式(8.2-9)给出。

例 8.2.1 求方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \qquad (8.2-13)$$

的解，这里$t\in L$，$f(t)$是已知函数，满足Hölder条件。

解 以下求方程(8.2-13)满足Hölder条件的解$\varphi(t)$。(8.2-13)是一个特征方程，此时$a(t)=0$，$b(t)=1$，因而$a^2(t)-b^2(t)=-1$。由于$G(t)=-1$，所以$\kappa=0$，于是$\ln[t^{-\kappa}G(t)]=\ln(-1)$，选取这样一个分支，使$\ln(-1)=\pi i$，于是有

$$\Gamma(t) = ie^{\pi i/2} = -1$$

由于$\kappa=0$，$Q_{\kappa-1}(t)=0$，由式(8.2-7)得到

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau \qquad (8.2-14)$$

式(8.2-13)与式(8.2-14)互为反演，式(8.2-14)就是Cauchy型积分边界值的反演公式。

3. 特征方程的相联方程的解

把特征方程(8.2-1)的相联方程

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=g(t)\qquad t\in L\tag{8.2-15}$$

记为

$$\frac{a(t)}{b(t)}b(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=g(t)$$

利用特征方程(8.2-1)的求解公式就可以求出 $b(t)\psi(t)$，从而求出方程(8.2-15)的解 $\psi(t)$ 来。

方程(8.2-15)的指标 $\kappa'=-\kappa$，式中 κ 是方程(8.2-1)的指标。

(1) 当 $\kappa'\geqslant 0$ 时，即 $\kappa\leqslant 0$ 时，方程(8.2-15)对任意自由项 $g(t)\in H(L)$ 在 H 类中可解，且它的所有解为

$$\psi(t)=a_*(t)g(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}Z(t)}\int_L\frac{Z(\tau)b_*(\tau)g(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{Q_{-\kappa-1}(t)}{Z(t)}\tag{8.2-16}$$

式中 $a_*(t)$、$b_*(t)$、$Z(t)$ 由式(8.2-8)、(8.2-9)确定($G(t)$ 由式(8.2-2)给出)。

(2) 当 $\kappa'<0$，即 $\kappa>0$ 时，方程(8.2-15)可解的充分必要条件是自由项 $g(t)$ 满足 κ 个条件

$$\int_L t^{k-1}b_*(t)Z(t)g(t)\mathrm{d}t=0\qquad(k=1,2,\cdots,\kappa)$$

当上述这些条件成立时，方程(8.2-15)的解由式(8.2-16)给出，在其中令 $Q_{-\kappa-1}(t)=0$。

4. 特征方程与它的相联方程解的关系

前已指出，当 $\kappa>0$ 时，方程 $K^\circ\varphi=0$ 有 κ 个线性无关的解；而此时 $\kappa'=-\kappa<0$，于是 $K^{\circ\prime}\psi=0$ 只有零解，于是 $K^\circ\varphi=0$ 与 $K^{\circ\prime}\psi=0$ 线性无关解个数(前者为 κ，后者为 0)之差，等于方程 $K^\circ\varphi=0$ 的指标 $\kappa=\mathrm{ind}\,\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$

由式(8.2-16)可知，当 $\kappa<0$ 时，$K^{\circ\prime}\psi=0$ 的解为 $\dfrac{Q_{-\kappa-1}(t)}{Z(t)}$，于是它有 $-\kappa$ 个线性无关解 $\dfrac{t^{k-1}}{Z(t)}(k=1,2,\cdots,-\kappa)$。这样，当 $\kappa<0$ 时，$K^\circ\varphi=f(t)$ 可解性条件(8.2-12)

$$\int_L f(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t=0$$

中的 $\psi_k(t)(k=1,2,\cdots,-\kappa)$ 正好是 $K^{\circ\prime}\psi=0$ 线性无关解的完备系。

上述关系对完整的奇异积分方程也成立，见§8.3。

5. 非闭弧段上特征方程的解

引进新的分片全纯函数，可以将特征方程(8.2-1)化为齐次 Riemann 问题。当式中 $a(t)$、$b(t)$ 都是常数，$a^2-b^2\neq 0$，且 L 是端点为 α、β 的非闭弧段时，解对应的齐次 Riemann 问题，就得到

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=f(t)\tag{8.2-17}$$

的解

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi\mathrm{i}}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m\times$$

$$\int_L\left(\frac{\tau-\beta}{\tau-\alpha}\right)^m f(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+\frac{C}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\qquad(8.2-18)$$

式中 $m=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{a+b}{a-b}$；$C$ 是任意常数，可以这样选取，使得 $\varphi(t)$ 在弧 L 的某一端点为有界。

方程(8.2－17)的解还可以表示为

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi\mathrm{i}(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\times$$

$$\int_L\frac{(\tau-\alpha)^{1-m}(\tau-\beta)^m f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{C}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\qquad(8.2-19)$$

当 $a=0$，$b=1$ 时 $\left(\text{此时 } m=\frac{1}{2}\right)$，就得到方程(8.2－13)的解

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}}\int_L\sqrt{\frac{\tau-\beta}{\tau-\alpha}}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{C}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}$$

或者

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\int_L\frac{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{C}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}$$

当 L 为区间$[-a,a]$时，方程(8.2－13)的解

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\sqrt{\frac{a+t}{a-t}}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-\tau}{a+\tau}}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{C}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

或者

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}\sqrt{a^2-t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{C}{\sqrt{a^2-t^2}}\qquad(8.2-20)$$

例 8.2.2 讨论在平面上理想流体绕充分光滑的非闭弧 AB 的流动问题。假定当 $z=\infty$ 时，流速的方向与 x 轴不平行，其分量为 U 及 V。

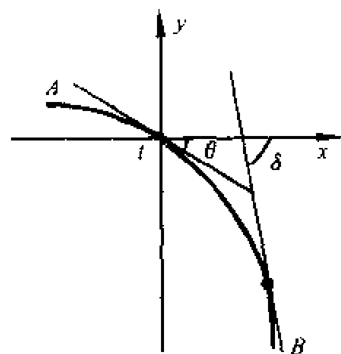


图 8－1

求速度复势 $W'(z)$，可以化为解以"涡旋函数" $T(\zeta)$ 为未知函数的奇异积分方程

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\delta)}}{\zeta-t}\mathrm{d}\zeta\right\}=V\cos\theta-U\sin\theta\qquad(8.2-21)$$

式中 θ 是在 $z=t$ 点，AB 的切线与 x 轴的夹角，δ 是在 $z=\zeta$ 点，AB 的切线与 x 轴的夹角(见图 8－1)。

一般情况下，方程(8.2－21)没有有限形式的解。特殊情况下，例如当 AB 是直线段$[-a,a]$时，可以求出它的精确解。此时 $\theta=\delta=0$，ζ 与 t 是实数，方程(8.2－21)就化为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{T(\zeta)}{\zeta-t}\mathrm{d}\zeta=-V\qquad(8.2-22)$$

由式(8.2－20)，方程(8.2－22)的解

$$T(t) = \frac{2V}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta + \frac{C}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

再利用 $\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta = t$，可得

$$T(t) = \frac{2Vt + C}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

由 $t=a$，$T=0$，就有 $C=-2Va$，于是

$$T(t) = -2V\sqrt{\frac{a - t}{a + t}}$$

从而得到复势

$$W'(z) = U - V\sqrt{\frac{a - z}{a + z}}$$

6. 正则化方法

把完整的奇异积分方程化为 Fredholm 方程的方法，称为**正则化方法**。

有三种正则化方法：**左正则化法**；**右正则化法**；**Carleman-Vekua 正则化方法**。

对算子 K_1，如果存在奇异积分算子 K_2，使得 K_2K_1（或 K_1K_2）是 Fredholm 算子，则称 K_2 为奇异积分算子 K_1 的**左（或右）正则化算子**。

(1) 奇异积分算子的乘积　设 K_1、K_2 为奇异积分算子

$$K_1\varphi = a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$K_2\omega = a_2(t)\omega(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对 $K_1\varphi$ 作用算子 K_2，得 $K_2(K_1\varphi)$，所得到的算子 K 称为算子 K_1 与 K_2 按所定顺序的**乘积**，记为 $K=K_2K_1$：

$$\begin{aligned}K\varphi &= K_2K_1\varphi = K_2(K_1\varphi)\\ &= a_2(t)\left[a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right] +\\ &\quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\Big[a_1(\tau)\varphi(\tau) +\\ &\quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau,\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\varphi(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\Big]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{8.2-23}$$

下面证明：算子 K 的指标 κ，等于算子 K_1 与 K_2 的指标 κ_1 与 κ_2 之和，即 $\kappa=\kappa_1+\kappa_2$。

由 Poincaré-Bertrand 公式(8.1-9)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau,\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\varphi(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\right\}\mathrm{d}\tau\\ &= M_2(t,t)M_1(t,t)\varphi(t) + \frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \varphi(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 \times\\ &\quad \int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

记
$$b_2(t) = M_2(t,t),\quad b_1(t) = M_1(t,t)$$

$$I(t,\tau_1) = \int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

则式(8.2－23)化为

$$\begin{aligned}
K\varphi &= [a_1(t)a_2(t) + b_1(t)b_2(t)]\varphi(t) + \\
&\quad \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{a_2(t)M_1(t,\tau) + M_2(t,\tau)a_1(t)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{(\pi\mathrm{i})^2}\int_L I(t,\tau_1)\varphi(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 \\
&= [a_1(t)a_2(t) + b_1(t)b_2(t)]\varphi(t) + \frac{a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t)}{\pi\mathrm{i}} \times \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \\
&\quad \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{a_2(t)[M_1(t,\tau) - M_1(t,t)] + a_1(t)[M_2(t,\tau) - M_2(t,t)]}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau + \\
&\quad \frac{1}{(\pi\mathrm{i})^2}\int_L I(t,\tau_1)\varphi(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1
\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)} = \dfrac{1}{\tau_1-t}\left[\dfrac{1}{\tau-t} - \dfrac{1}{\tau-\tau_1}\right]$

于是 $I(t,\tau_1) = \dfrac{1}{\tau_1-t}\left\{\displaystyle\int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau - \int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\mathrm{d}\tau\right\}$

记 $\omega(\tau_1,t) = \displaystyle\int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$

$$\omega_1(\tau_1,t) = \int_L \frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\mathrm{d}\tau$$

因为 $M_2(t,\tau)M_1(t,\tau) \in H$

所以 $\omega(\tau_1,t) \in H$、 $\omega_1(\tau_1,t) \in H$

且 $\omega(\tau_1,\tau_1) = \omega_1(\tau_1,\tau_1)$

于是 $I(t,\tau_1) = \dfrac{\omega(\tau_1,t) - \omega_1(\tau_1,t)}{\tau_1 - t} = \dfrac{\tilde{\kappa}(\tau,t)}{|\tau_1 - t|^\lambda} \quad (0 \leqslant \lambda < 1)$

式中 $\tilde{\kappa}(\tau_1,t) \in H$。

因此算子(8.2－23)的特征部分的系数为

$$a^*(t) = a_1(t)a_2(t) + b_1(t)b_2(t), \quad b^*(t) = a_2(t)b_1(t) + a_1(t)b_2(t)$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a^*(t) - b^*(t)}{a^*(t) + b^*(t)}\right]_L \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{[a_1(t) - b_1(t)][a_2(t) - b_2(t)]}{[a_1(t) + b_1(t)][a_2(t) + b_2(t)]}\right]_L \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)}\right]_L + \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a_2(t) - b_2(t)}{a_2(t) + b_2(t)}\right]_L
\end{aligned}$$

即 $$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$$

由于 Fredholm 算子的指标为零，因此互为正则化算子的指标大小相等，符号相反。

最后指出，算子的乘积通常不适合交换律，即 $K_2K_1 \neq K_1K_2$

(2) *左正则化* 完整的奇异积分方程

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \qquad (8.2－24)$$

可以左正则化，即在它的两边作用(左正则化)算子 M 后，得到 Fredholm 方程

$$MK\varphi = Mf \tag{8.2-25}$$

方程(8.2－25)可以记为

$$M(K\varphi - f) = 0 \tag{8.2-26}$$

由于算子 M 是齐次的，方程(8.2－24)的任意解都满足式(8.2－26)，因此左正则化不会失去解。当 $\kappa \geqslant 0$，即算子 M 的指标 $-\kappa \leqslant 0$，因而没有特征函数时，$M\omega = 0$ 只有零解，于是由 $M(K\varphi - f) = 0$ 立即可以推出 $K\varphi = f$，因此 $\kappa \geqslant 0$ 时左正则化是等价的。

可以取 K'° 或 $K^{\circ\prime}$ 作为左正则化算子 M，这两个算子形式简单，在正则化时常用。

当 $\kappa < 0$ 时，算子 M(例如取为 K'°)的指标大于零，由定理 8.2.1 知，算子 M 的特征函数存在，这可能导致附加解的存在，这些附加解通常是方程

$$K\varphi = f(x) + \sum \alpha_j \omega_j(x)$$

的解，式中 $\omega_j(x)$ 是特征函数；α_j 是任意常数。

例 8.2.3 对于非齐次特征方程(8.2－1)

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau = f(t)$$

设 a、b 是常数，L 为闭曲线。把算子

$$K'^{\circ}\omega = a\omega(t) - \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau$$

作用到上述方程的两边，得到

$$\begin{aligned} & a\left[a\varphi(t) + \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau\right] - \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{1}{\tau - t} \times \\ & \left[a\varphi(\tau) + \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau} \mathrm{d}\tau_1\right] \mathrm{d}\tau \\ = & af(t) - \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int \frac{f(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

再用 Poincaré-Bertrand 公式，可得

$$(a^2 - b^2)\varphi(t) = af(t) - \frac{b}{\pi \mathrm{i}} \int_l \frac{f(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau$$

若 $a^2 - b^2 \neq 0$，就得到

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} \mathrm{d}\tau$$

当 $a = 0$，$b = 1$ 时，再次得到方程(8.2－13)的解(8.2－14)。

(3) 右正则化法　方程(8.2－24)可以右正则化。即对奇异积分方程

$$K\varphi = f$$

作未知函数的变换

$$\varphi = M\omega \tag{8.2-27}$$

式中 ω 为新的未知函数，得到

$$K(M\omega) = KM\omega = f \tag{8.2-28}$$

KM 是 Fredholm 算子，于是方程(8.2－28)是关于未知函数 ω 的 Fredholm 方程。求出方程(8.2－28)的解 $\omega(t)$，再由式(8.2－27)就可得到方程(8.2－24)的解 $\varphi(t)$，这时只要计算两个积分，一个是常义积分，另一个是奇异积分。上述解奇异积分方程(8.2－24)的方法，就是右

正则化法。

可以证明，若 K_2K_1 是 Fredholm 算子，则 K_1K_2 也是 Fredholm 算子，所以对左正则化适用的算子 K'° 或 $K^{\circ\prime}$ 对右正则化也适用，因而左（或右）正则化算子简称为**正则化算子**。

方程(8.2-24)与方程(8.2-28)不一定等价。这是因为，若(8.2-24)有解 $\varphi_0(x)$，但如果方程 $M\omega=\varphi_0$ 不可解，那末就不能从方程(8.2-28)解出 $\omega(x)$ 进而得到方程(8.2-24)的解。在这种情况下，右正则化可能失去解。

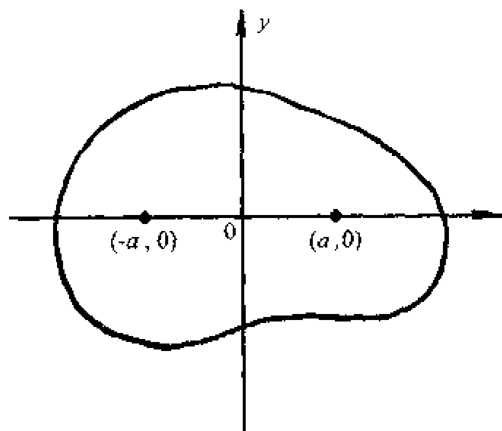


图 8-2

但是，当算子 K 的指标 $\kappa<0$ 时，它的右正则化算子 M(取为 K'°)的指标为 $-\kappa>0$，由定理 8.2.1 知，方程 $M\omega=\varphi$ 对任意自由项有解。因此，当 $\kappa<0$ 时，右正则化是等价的。

(4) **Carleman-Vekua 正则化法** Carleman-I. N. Vekua 正则化法，在理论和应用上都很重要，以下举一例子加以说明。

例 8.2.4 讨论边界与裂纹(图 8-2 中长为 2a 的内裂纹)相距为有限长之物体的裂纹问题时，要解**位错密度** $\mu_2(t)$ 适合的以下奇异积分方程

$$p_2(t_0)=\frac{2G}{\pi(\kappa+1)}\int_{-a}^{a}\mu_2(t)\Big[\frac{1}{t-t_0}-\lambda(t_0,t)\Big]\mathrm{d}t\quad(|t_0|<a)\qquad(8.2-29)$$

用下述方法，可以把式(8.2-29)化为 Fredholm 方程。把式(8.2-29)改写为

$$\frac{\kappa+1}{2G\mathrm{i}}\Big[p_2(t_0)+\frac{2G}{\pi(\kappa+1)}\int_{-a}^{a}\mu_2(t)\lambda(t_0,t)\mathrm{d}t\Big]=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{\mu_2(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t$$

暂时把上式左端认为是式(8.2-13)中的已知函数 $f(t)$，利用式(8.2-20)，可得

$$\mu_2(t_0)=-\frac{\kappa+1}{2G\pi\sqrt{a_2-t_0^2}}\times$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\Big[p_2(t)+\frac{2G}{\pi(\kappa+1)}\int_{-a}^{a}\mu_2(s)\lambda(t,s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$$

(由位移条件的单值性，可确定式(8.2-20)中的常数 C 为 0。)

设 $$r(t)=\frac{2G}{\kappa+1}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mu_2(t)\sqrt{a^2-t^2}\text{，得到}$$

$$r(t_0)+\int_{-a}^{a}\frac{1}{\pi^2}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\Big[\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{2G}{\kappa+1}\int_{-a}^{a}\mu_2(s)\lambda(t,s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t_0-t}p_2(t)\mathrm{d}t$$

交换积分顺序就有

$$r(t_0)+\int_{-a}^{a}\frac{r(s)}{\sqrt{a^2-s^2}}\Big\{\frac{1}{\pi^2}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\lambda(t,s)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t_0-t}p_2(t)\mathrm{d}t$$

记
$$\Gamma(t_0,s) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\lambda(t,s)\mathrm{d}t$$

从而得到以 $r(t_0)$ 为未知函数的下列 Fredholm 方程

$$r(t_0) + \int_{-a}^{a} \frac{r(s)\Gamma(t_0,s)}{\sqrt{a^2-s^2}}\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t_0-t}p_2(t)\mathrm{d}t$$

上述方法就是 **Garleman-Vekua 正则化方法**。对于这种方法，亦需要讨论等价性问题。

§8.3 Noether 定理

1. 奇异积分方程的基本定理

完整的奇异积分方程

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) \qquad (8.3-1)$$

成立以下三个基本定理，称为 **Noether 定理**。它在奇异积分方程理论中的作用，与 Fredholm 定理对 Fredholm 积分方程所起的作用同样重要。

定理 8.3.1 齐次方程 $K\varphi=0$ 线性无关解的个数是有限的。

证明 由于左正则化不会出现失去解的情况，由 §2.4 中的 Fredholm 第二定理，经正则化得到的 Fredholm 齐次方程线性无关解的个数是有限的．因此原奇异积分方程 $K\varphi=0$ 线性无关解的个数是有限的。

定理 8.3.2 非齐次方程 $K\varphi=f$ 可解的充要条件是：f 满足以下等式

$$\int_L f(t)\psi_j(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,k') \qquad (8.3-2)$$

式中 $\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\varphi_k{}'(t)$ 是相联齐次方程 $K'\psi=0$ 线性无关解的完全组，k' 是方程 $K'\psi=0$ 线性无关解的个数。

证明 必要性 可以证明，成立下列恒等式

$$\int_L \psi K\varphi\mathrm{d}\tau = \int_L \varphi K'\psi\mathrm{d}\tau \qquad (8.3-3)$$

因此有

$$\int f(t)\psi_j(t)\mathrm{d}t = \int_L K\varphi(t)\psi_j(t)\mathrm{d}t = \int_L \varphi(t)K'\psi_j(t)\mathrm{d}t = 0$$

必要性立刻得到证明。

充分性 先考虑 $\kappa\geqslant 0$ 的情况。此时正则化算子 M 的指标 $-\kappa\leqslant 0$，于是没有特征函数，因此方程

$$MK\varphi = Mf \qquad (8.3-4)$$

与原方程(8.3-1)等价，这两个方程同时可解或同时不可解。根据 Fredholm 方程的理论，方程(8.3-4)当条件

$$\int_L \chi_j(t)Mf\mathrm{d}t = 0 \qquad (8.3-5)$$

成立时可解，式中 $\chi_j(t)$ 是方程(8.3-4)的相联方程

$$K'M'\chi = 0 \tag{8.3-6}$$

的解。

利用式(8.3－3)，式(8.3－5)化为

$$\int_L \chi_j Mf\mathrm{d}t = \int_L fM'\chi_j\mathrm{d}t = 0$$

把式(8.3－6)作为一个以 K' 为算子、$M'\chi$ 为未知函数的积分方程，于是 $M'\chi_j$ 是算子 K' 的特征函数；若把它们记为 $\psi_j(t)$，就得到条件(8.3－2)。

再考虑 $\kappa<0$ 的情况，此时利用右正则化，作代换 $\varphi=M\omega$，就得到等价于原方程(8.3－1)的 Fredholm 方程

$$KM\omega = f \tag{8.3-7}$$

方程(8.3－7)的可解性条件是

$$\int_L f(t)\chi_j(t)\mathrm{d}t = 0$$

式中 $\chi_j(t)$是方程(8.3－7)的相联齐次方程

$$M'K'\chi = 0 \tag{8.3-8}$$

的任何一个解。

把式(8.3－8)作为一个以 M' 为算子、$K'\chi$ 为未知函数的方程。由于 M' 是一个指标为负数(因而没有特征函数)的算子，因此得出 $K'\chi=0$，所以 $\chi_j(t)$是算子 K' 的特征函数，同样把它记为 $\psi_j(t)$，就可以得到正交性条件(8.3－2)。

定理 8.3.3 齐次方程

$$K\varphi = 0 \tag{8.3-9}$$

线性无关解的个数 k 与相联齐次方程

$$K'\psi = 0 \tag{8.3-10}$$

线性无关解的个数 k' 之差 $k-k'$，依赖于算子 K 的特征部分，并且这个差等于算子 K 的指标 κ，即

$$k - k' = \kappa \tag{8.3-11}$$

证明 当 $\kappa\geqslant0$ 时，正则化算子取为 $K^{o\prime}$，于是 Fredholm 方程 $K^{o\prime}K\varphi=0$ 等价于原方程(8.3－9)，因此它的线性无关解的个数亦为 k。由于

$$(K^{o\prime}K)' = K'K^o$$

由 Fredholm 方程的理论，方程 $K^{o\prime}K\varphi=0$ 的相联齐次方程

$$K'K^o\psi = 0 \tag{8.3-12}$$

也刚好有 k 个线性无关解。

方程(8.3－12)等价于方程

$$K^o\psi = \alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_k\psi_{k'} \tag{8.3-13}$$

式中 $\psi_j(t)(j=1,2,\cdots,k')$是算子 K' 的特征函数；α_j 是任意常数。由于 $\kappa\geqslant0$，根据定理 8.2.1，方程(8.3－13)对任意右端可解，它的解为

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{k'}\alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\kappa}c_j\varphi_j(t) \tag{8.3-14}$$

式中 $\alpha_j R\psi_j$ 是方程 $K^o\varphi=\alpha_j\psi_j$ 的形式解，即

$$\alpha_j R\psi_j = (K^\circ)^{-1}\alpha_j\psi_j \tag{8.3-15}$$

以下证明式(8.3-14)右端出现的所有函数是线性无关的。

设式(8.3-14)的右端

$$\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\kappa}c_j\varphi_j(t) = 0 \tag{8.3-16}$$

两边作用算子 K'°，由式(8.3-15)可知

$$K^\circ\left(\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j R\psi_j\right) = \sum_{j=1}^{\kappa}\alpha_j\psi_j = 0$$

由于 $\psi_j(j=1,2,\cdots,k')$是线性无关的，所以 $\alpha_j=0(j=1,2,\cdots,k')$，于是由式(8.3-16)得到

$$\sum_{j=1}^{\kappa}c_j\varphi_j(t) = 0$$

再由 $\varphi_j(t)(j=1,2,\cdots,\kappa)$为线性无关，可推出 $C_j=0(j=1,2,\cdots,\kappa)$，这样就证明了式(8.3-14)右端出现的所有函数是线性无关的。

这样，积分方程 $K'K^\circ\psi=0$ 有 $k'+\kappa$ 个线性无关解，因此式(8.3-11)成立：

$$k - k' = \kappa$$

$\kappa<0$ 的情况不需要作详细的讨论，这是由于相联算子的互反性(显然成立$(K')'=K$)，对于方程 $K'\psi=0$ 来说，它的相联齐次方程就是原方程 $K\varphi=0$，而 K' 的指标 $\kappa'=-\kappa>0$，由上面在指标 $\kappa\geqslant0$ 的情况所证得的结果可知

$$k' - k = \kappa' = -\kappa$$

因此式(8.3-11)在此时仍然成立。

定理 8.3.1、8.3.2 与 Fredholm 定理相类似，定理 8.3.3 反映了奇异积分方程与 Fredholm 方程的差别。齐次积分方程与相联齐次方程线性无关解个数之差，称为积分方程的指标。奇异积分方程的指标一般不为零；但 Fredholm 方程的指标恒为零。

当算子 K 的指标 $\kappa=0$ 时，定理 8.3.3 成为 Fredholm 定理，即指标为零的奇异积分方程，Fredholm 三个定理都成立。于是把指标 κ 为零的奇异积分方程称为**拟 Fredholm 方程**，它在实际中经常遇到。

式(8.2-7)、(8.2-16)及 Noether 定理，在 L 由有限条互不相交的光滑闭曲线组成时仍成立。此时式(8.1-8)中$[\quad]_L$表示括号内表达式绕各曲线 L_k 的增量之和。

奇异积分方程的理论还可以推广到系数为间断函数及积分路径为逐段光滑、或为非闭弧段等情况。在 V. Z. Parton 等著的 Integral Equations in Elasticity 一书中有这方面内容的简明叙述。

§8.4 奇异积分方程组

如果把 Cauchy 核奇异积分方程

$$\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \frac{\boldsymbol{b}(t)}{\pi i}\int_L\frac{\boldsymbol{\varphi}(\tau)}{\tau-t}d\tau + \int_L\boldsymbol{k}(t,\tau)\boldsymbol{\varphi}(\tau)d\tau = \boldsymbol{f}(t) \tag{8.4-1}$$

中的 $\boldsymbol{a}(t)$、$\boldsymbol{b}(t)$、$\boldsymbol{k}(t,\tau)$看为 n 阶方阵，$\boldsymbol{f}(t)$与$\boldsymbol{\varphi}(t)$看为 n 维向量，则式(8.4-1)就是 **Cauchy 核奇异积分方程组**。

如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 L 上为非奇异方阵(即 $\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\neq 0,\det(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\neq 0$)则称为**正规型奇异积分方程组**。

奇异积分方程组(8.4－1)的指标 κ 定义为

$$\kappa = \mathrm{ind}K = \frac{1}{2\pi}\{\arg\det[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{-1}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]\}_L$$

它等于齐次积分方程组与相联齐次方程组线性无关解个数之差。方程组的正则化与一个方程一样。奇异积分方程理论中的许多结果可以不加改变地引到奇异积分方程组中来。与奇异积分方程不同，特征方程组在所在的区域一般是不可解的。

参 考 文 献

1 Мусхелишвили Н И. 奇异积分方程．上海：上海科学技术出版社，1966

2 Математическая Энциклопедия Т. 4，Изд 1－е. Москва：Советская Энциклопедия，1984

习 题

1 试证：对于方程

$$k\varphi \equiv (1+t)\varphi(t) + \frac{1-t}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L \mathrm{e}^{t\tau}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = 2t$$

算子 K'"是它的左正则化算子。

2 试证：方程

$$a(t)\varphi(t) - \lambda\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t)$$

的解为

$$\varphi(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t)+\lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda \mathrm{e}^{\beta(t)}}{\sqrt{a^2(t)+\lambda^2\pi^2}}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-\beta(\tau)}f(\tau)}{\sqrt{a^2(\tau)+\lambda^2\pi^2}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - t} + \frac{B}{\lambda(1-t)}\right]$$

式中

$$B = \frac{\mathrm{sign}\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau - \lambda\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-\beta(\tau)}f(\tau)}{\sqrt{a^2(\tau)+\lambda^2\pi^2}}\mathrm{d}\tau$$

$$\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\alpha(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau$$

$$\alpha(t) = \arctan\frac{\lambda\pi}{a(t)}$$

第九章　积分方程组与非线性积分方程

这一章首先对积分方程组作简单的介绍，然后利用逐次逼近法求出一些非线性积分方程的解来。

§9.1　积分方程组

线性积分方程的理论，不难推广到线性积分方程组，从而建立起与线性积分方程相平行的理论。

1. Fredholm 积分方程组

在实际问题中，经常引出下列形式的 **Fredholm 积分方程组**

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b k_{ij}(x,t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = f_i(x) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.1-1}$$

式中　$k_{ij}(x,t)$和 $f_i(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$是平方可积的已知函数；$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$是未知函数。

记

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}(x,t) = \begin{pmatrix} k_{11}(x,t) & k_{12}(x,t) & \cdots & k_{1n}(x,t) \\ k_{21}(x,t) & k_{22}(x,t) & \cdots & k_{2n}(x,t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1}(x,t) & k_{n2}(x,t) & \cdots & k_{nn}(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$$

式中　T 表示求转置，则积分方程组(9.1－1)可记为向量形式

$$\boldsymbol{\varphi}(x) - \lambda\int_a^b \boldsymbol{K}(x,t)\,\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}(x) \tag{9.1-2}$$

矩阵 $\boldsymbol{K}(x,t)$称为向量方程(9.1－2)或方程组(9.1－1)的**核**。

向量方程(9.1－2)与一个未知函数的 Fredholm 积分方程，形式上类似，而且对它可以建立与 Fredholm 方程的理论相平行的理论。

2. Volterra 积分方程组

同样，下列形式的 **Volterra 积分方程组**

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^x k_{ij}(x,t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = f_i(x) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.1-3}$$

也可记为向量形式

$$\boldsymbol{\varphi}(x) - \lambda\int_a^x \boldsymbol{K}(x,t)\boldsymbol{\varphi}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{f}(x)$$

式中　向量$\boldsymbol{\varphi}(x)$、$\boldsymbol{f}(x)$与矩阵$\boldsymbol{K}(x,t)$的定义，与Fredholm方程组相同。

可以证明，上列形式的Volterra积分方程组，同Volterra积分方程一样，对于任何λ存在惟一的解。

对于卷积型的Volterra积分方程组，可以用Laplace变换求解，见§5.2。

§9.2　非线性第二类Fredholm方程

对于非线性积分方程，线性积分方程的理论一般不再适用。但是在一定的条件下，非线性积分方程也可以用逐次逼近法求解。

下列形式的非线性第二类Fredholm方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b F[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t+f(x) \tag{9.2-1}$$

称为**Urysohn方程**。式中λ是参数；$\varphi(x)$是$[a,b]$上的未知函数；$F[x,t,u]$是x，t，u的函数，F关于u是非线性的。它是一种重要的非线性积分方程。它的特殊情况是下列形式的**Hammerstein方程**

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t+f(x) \tag{9.2-2}$$

式中　$k(x,t)$、$G(t,u)$、$f(x)$是已知函数；$G(t,u)$关于u是非线性的。

例如

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^2(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^{1/2}(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

都是Hammerstein方程。

1．用逐次逼近法解Hammerstein方程

对于Hammerstein方程(9.2－2)，如果$k(x,t)$连续且$G(t,u)$关于u满足系数适当小的Lipschitz条件，就可以用逐次逼近法求解。成立

定理9.2.1　对于方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t=f(x) \tag{9.2-2}$$

如果$f(x)$在$[a,b]$连续，$k(x,t)$在$a\leqslant x$，$t\leqslant b$连续，且$|k(x,y)|\leqslant A$，$G[t,u]$对所有的u及$[a,b]$上的t连续，而且

$$\int_a^b|G[t,\varphi(t)]|^2\mathrm{d}t\leqslant B^2\int_a^b|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t \tag{9.2-3}$$

此外$G(t,u)$关于u还满足Lipschitz条件

$$|G(t,u_2)-G(t,u_1)|\leqslant C|u_2-u_1| \tag{9.2-4}$$

式中$C>0$与t无关，只要

$$|\lambda|<\frac{1}{AC(b-a)}$$

则在连续函数类中，方程(9.2－2)存在惟一解。若按下列迭代公式构造函数序列$\{\varphi_n(x)\}$

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)G[t,\varphi_{n-1}(t)]\mathrm{d}t \tag{9.2-5}$$

$\{\varphi_n(x)\}$在 $a\leqslant x$，$t\leqslant b$ 上就一致收敛于积分方程(9.2-2)的解 $\varphi(x)$。

证明 先证函数序列$\{\varphi_n(x)\}$是收敛的。由于 $\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]$，因此只要证明级数 $\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]$ 收敛即可。而

$$\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\{G[t,\varphi_{j-1}(t)] - G[t,\varphi_{j-2}(t)]\}\mathrm{d}t$$

由式(9.2-4)

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \leqslant AC|\lambda|\int_a^b |\varphi_{j-1}(t) - \varphi_{j-2}(t)|\mathrm{d}t \tag{9.2-6}$$

由 Schwartz 不等式

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|^2 = \left(\lambda\int_a^b k(x,t)G[t,f(t)]\mathrm{d}t\right)^2$$

$$\leqslant \lambda^2A^2\int_a^b\{G[t,f(t)]\}^2\mathrm{d}t \leqslant \lambda^2A^2B^2\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant |\lambda|AB\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

由式(9.2-6)

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\{G[t,\varphi_1(t)] - G[t,\varphi_0(t)]\}\mathrm{d}t$$

于是

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|^2 \leqslant \lambda^2\int_a^b k^2(x,t)\mathrm{d}t\int_a^b\{G[t,\varphi_1(t) - G[t,\varphi_0(t)]\}^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \lambda^2A^2(b-a)C^2\int_a^b|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \lambda^2A^2(b-a)C^2|\lambda|^2A^2B^2(b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leqslant |\lambda|^2A^2C(b-a)B\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

利用递推关系式(9.2-6)可得，对一切正整数 j 成立

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \leqslant |\lambda|^jA^jC^{j-1}(b-a)^{j-1}B\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

但级数 $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda|^jA^jC^{j-1}(b-a)^{j-1}$ 为等比级数，当$|\lambda|AC(b-a)<1$，即

$$|\lambda| < \frac{1}{AC(b-a)} \tag{9.2-7}$$

时收敛，所以当式(9.2-7)成立时，级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]$$

绝对且一致收敛，因而函数序列$\{\varphi_n(x)\}$一致收敛于连续函数$\varphi(x)$。对式(9.5－5)两端令$n\to\infty$求极限就可知，$\varphi(x)$确是方程(9.2－2)的解。

再证惟一性。若$\psi(x)$也是方程(9.2－2)的解，则有

$$\varphi(x)-\psi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\{G[t,\varphi(t)]-G[t,\psi(t)]\}\mathrm{d}t$$

但由式(9.2－4)

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|AC\int_a^b|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t$$

上式两端关于x从a到b积分

$$\int_a^b|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x\leqslant|\lambda|AC(b-a)\int_a^b|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t$$

由于式(9.2－7)成立，于是

$$\int_a^b|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t=0$$

所以
$$\varphi(x)=\psi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

如果$k(x,t)$平方可积，亦可推出解存在的结论。用不动点原理可以给出定理9.2.1简洁的证明。

当$k(x,t)$是Fredholm型、对称的半正定核（它的所有特征值为正数），若$G(t,u)$连续且满足条件

$$|G(t,u)|\leqslant C_1|u|+C_2$$

式中 C_1、C_2为正常数，且C_1小于核$k(x,t)$的第一特征值，则方程

$$\varphi(x)+\int_a^b k(x,t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t=0 \tag{9.2-8}$$

至少有一个连续解。如果对(a,b)中任意固定的t，$G(t,u)$是u的非减函数，或$G(t,u)$关于u满足Lipschitz条件

$$|G(t,u_2)-G(t,u_1)|<C|u_2-u_1|$$

式中 正常数C小于核$k(x,t)$的第一特征值，则方程不可能存在一个以上的解。此解可以用逐次逼近法求出。

考虑**自由项为零的、含参数λ的非线性积分方程**

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t=0 \tag{9.2-9}$$

与线性齐次积分方程不同，$\varphi(x)=0$不一定是方程(9.2－9)的解；方程(9.2－9)可能有依赖于参数λ的非零解，而对于线性（带非奇性核）的齐次积分方程，仅当λ是特征值时才有非零解。

对于非线性方程(9.2－9)来说，它的解称为特征值λ对应的**特征函数**。如果

$$\int_a^b k(x,t)G(t,0)\mathrm{d}t=0$$

成立，则函数$\varphi(t)=0$是方程(9.2－9)的一个与λ值无关的特征函数，而对线性齐次积分方程来说，它的非零解才是它的特征函数。

例9.2.1 讨论方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\frac{x^2+t^2}{1+|\varphi(t)|}\mathrm{d}t=0 \tag{9.2-10}$$

的可解性。

解 方程(9.2－10)的核 $k(x,t)=x^2+t^2$，对应的 $A=2$，而 $G(t,u)=\frac{1}{1+|u|}$，于是

$$|G(t,u_2)-G(t,u_1)|=\left|\frac{1}{1+|u_2|}-\frac{1}{1+|u_1|}\right|$$
$$=\frac{||u_1|-|u_2||}{(1+|u_2|)(1+|u_1|)}<|u_2-u_1|$$

因此对应的 $C=1$，由定理 9.2.1，当 $|\lambda|<\frac{1}{2\cdot 1\cdot(1-0)}=\frac{1}{2}$时，方程(9.2－10)有惟一的连续解。

例 9.2.2 求方程

$$\varphi(x)=\int_0^1(x+t)^2\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-11}$$

的二次近似解。

解 一个含参数 λ 的方程，可以对 λ 作某些限制，使它的解惟一存在。方程(9.2－11)不含参数，因此它的解通常是不惟一的。

方程(9.2－11)显然有平凡解 $\varphi(x)=0$，下面按以下迭代公式求它的非零解

$$\varphi_n(x)=\int_0^1(x+t)^2\varphi_{n-1}^2(t)\mathrm{d}t$$

由于不能取零次近似 $\varphi_0(x)=0$，所以考虑取 $\varphi_0(x)=C$，C 为非零常数。由

$$\int_0^1 C\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+t)^2C^2\mathrm{d}t$$

确定出 $C=\frac{6}{7}$，于是

$$\varphi_1(x)=\int_0^1(x+t)\left(\frac{6}{7}\right)^2\mathrm{d}t=\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(x^2+x+\frac{1}{3}\right)$$
$$\varphi_2(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^2\int_0^1(x+t)^2\left(t^2+t+\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t$$
$$=\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{17}{10}x^2+\frac{227}{90}x+\frac{383}{378}\right)$$

2. 用逐次逼近法解 Urysohn 方程

对 Urysohn 方程，成立

定理 9.2.2 如果方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b F[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t=f(x) \tag{9.2-1}$$

中的 $f(x)$是$[a,b]$上的实连续函数，$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2$($m_1,m_2$ 为实常数)，$F[x,t,u]$当 $a\leqslant x,t\leqslant b,p\leqslant u\leqslant q$($p,q$ 是使得 $p<m_1\leqslant m_2<q$ 成立的已知实数)时，为实连续函数，$|F(x,t,u)|\leqslant A$(A 为正常数)，且关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|F(x,t,u_2)-F(x,t,u_1)|\leqslant C|u_1-u_2|$$

式中 C 为正常数，那么，当 λ 满足条件

$$|\lambda|<\min\left(\frac{1}{C(b-a)},\frac{m_2-p}{A(b-a)},\frac{q-m_1}{A(b-a)}\right) \tag{9.2-12}$$

时，方程(9.2-1)存在惟一解，此解可以用逐次逼近法求出。

在满足定理的条件下，逐次逼近过程中的函数序列$\{\varphi_n(x)\}$可以按下列迭代公式确定

$$\varphi_0(x)=f(x) \tag{9.2-13}$$

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b F[x,t,\varphi_{n-1}(t)]\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots) \tag{9.2-14}$$

与定理9.2.1类似，可以证明序列$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，它的极限函数$\varphi(x)$连续，且是方程(9.2-1)的解，满足$p\leqslant\varphi(x)\leqslant q$。

3. 退化核的 Hammerstein 方程

若 Hammerstein 方程(9.2-2)的核为退化核

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(t) \tag{9.2-15}$$

则它的解可以用解退化核的第二类 Fredholm 方程类似的方法求出。

含有形如(9.2-15)的退化核的方程(9.2-2)可化为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\int_a^b b_i(t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t \tag{9.2-16}$$

设

$$C_i=\int_a^b b_i(t)G[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{9.2-17}$$

式中 C_i 为待定常数。由式(9.2-16)就有

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i a_i(x) \tag{9.2-18}$$

把式(9.2-18)代入式(9.2-17)，得到含 m 个待定常数 C_i 的方程组(通常是超越方程组)

$$C_i=H_i(C_1,C_2,\cdots,C_m) \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{9.2-19}$$

当 $G[t,u]$是 u 的多项式，即

$$G[t,u]=p_0(t)+p_1(t)u+\cdots+p_n(t)u^n$$

时，方程组(9.2-19)化为 C_1，C_2，…，C_m 的代数方程组，式中 $p_0(t)$，$p_1(t)$，…，$p_n(t)$是区间$[a,b]$上 t 的连续函数。如果方程组的一组解为 C_1^0，C_2^0，…，C_m^0，则积分方程(9.2-16)有形如(9.2-18)的解

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i^0 a_i(x)$$

显然，积分方程(9.2-16)解的个数等于方程组(9.2-19)解组的个数。

例 9.2.3 求积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xt\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-20}$$

注1 关于条件(9.2-12)，说明如下：

由于 $p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q$，只要 $|\lambda|\leqslant\min\left(\frac{m_2-p}{A(b-a)},\frac{q-m_1}{A(b-a)}\right)$，则对任何正整数 n，由式(9.2-14)确定的 $\varphi_n(x)$都满足 $p\leqslant\varphi_n(x)\leqslant q$，这样就能保证由式(9.2-13)、(9.2-14)总能依次确定出 $\varphi_n(x)$来。

注2 零次近似还可以取为满足 $p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q$ 的任意连续函数 $\varphi_0(x)$。

注3 上述非线性第二类 Fredholm 方程的解法，对非线性第二类 Fredholm 积分方程组也适用。

的解，式中 λ 为参数。

解 设

$$c = \int_0^1 t\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-21}$$

于是

$$\varphi(x) = c\lambda x \tag{9.2-22}$$

把式(9.2－22)代入式(9.2－21)，就有 $c = \int_0^1 tc^2\lambda^2 t^2 \mathrm{d}t$ ，即

$$c = \frac{\lambda^2}{4}c \tag{9.2-23}$$

方程(9.2－23)有两个解：$c_1=0$，$c_2=\frac{4}{\lambda^2}$。因此对任何 $\lambda\neq 0$，积分方程(9.2－20)有两个解

$$\varphi_1(x) \equiv 0,\quad \varphi_2(x) = \frac{4}{\lambda}x$$

例 9.2.4 求积分方程

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x+t}{2}}[1 + \varphi^2(t)]\mathrm{d}t \tag{9.2-24}$$

的解。

解 设

$$c = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}[1 + \varphi^2(t)]\mathrm{d}t \tag{9.2-25}$$

于是

$$\varphi(x) = c\mathrm{e}^{x/2} \tag{9.2-26}$$

把式(9.2－26)代入式(9.2－25)，得

$$c = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{t/2}[1 + c^2\mathrm{e}^t]\mathrm{d}t = \frac{1}{3}c^2(\mathrm{e}^{3/2} - 1) + \mathrm{e}^{1/2} - 1$$

即

$$(\mathrm{e}^{3/2} - 1)c^2 - 3c + 3(\mathrm{e}^{1/2} - 1) = 0$$

上述 c 的二次方程的判别式小于零，因此没有实根，所以积分方程(9.2－24)没有实的解。

例 9.2.5 求方程

$$\varphi(x) = \int_0^1 a(x)a(t)\varphi(t)\sin\left[\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right]\mathrm{d}t \tag{9.2-27}$$

的解，式中 $a(t)>0, t\in[0,1]$。

解 方程(9.2－27)有形如

$$\varphi(x) = ca(x)$$

的解，按与以上几例同样的步骤，可得到确定待定常数 c 的方程：

$$1 = \int_0^1 a^2(t)\mathrm{d}t \cdot \sin c \tag{9.2-28}$$

若 $\int_0^1 a^2(t)\mathrm{d}t > 1$ ，则方程(9.2－28)有无穷个实解，因而原积分方程(9.2－27)有无穷个解。

4. 某些特殊的 Hammerstein 方程

某些特殊类型的 Hammerstein 方程，可以用代数方法求出解来。

(1) $\varphi(x)=\int_a^b[A(t)x+B(t)]\varphi^2(t)\mathrm{d}t$ **型方程**

例 9.2.6 解 Hammerstein 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1(x-t)\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-29}$$

解 不失一般性，可设 $\lambda=1$。这是由于若 $\psi(x)$ 是方程(9.2-29)的任意解，则 $\varphi(x)=\lambda\psi(x)$ 是方程

$$\varphi(x)=\int_0^1(x-t)\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-30}$$

的一个解。

把方程(9.2-30)记为

$$\varphi(x)=x\int_0^1\varphi^2(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 t\,\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-31}$$

因此，方程(9.2-30)的解 $\varphi(x)$ 是 x 的一个线性函数，即

$$\varphi(x)=px+q \tag{9.2-32}$$

式中 p、q 为待定常数。

把式(9.2-32)代入式(9.2-31)，得

$$px+q=x\left(\frac{1}{3}p^2+pq+q^2\right)-\frac{1}{4}\left(p^2+\frac{2}{3}pq+\frac{1}{2}q^2\right)$$

由以上恒等式可得 p、q 所满足的方程组

$$\begin{cases}p^2+3pq+3q^2=3p & (9.2-33)\\ 3p^2+8pq+6q^2=-12q & (9.2-34)\end{cases}$$

若把 p、q 作为平面直角坐标系的坐标，则式(9.2-33)与(9.2-34)都表示椭圆，又由于 $p=0,q=0$ 是方程组(9.2-33)、(9.2-34)的解，所以这两个椭圆都通过原点 $(p,q)=(0,0)$。

求出这两个椭圆除了(0,0)以外的实交点 (p,q)，就得到方程(9.2-30)的非零解。

容易求出上述方程组的非零解为

$$p=12,\quad q=-6$$

因此积分方程(9.2-30)的非零解为

$$\varphi_1(x)=12x-6$$

但上述两个椭圆还有两个交点

$$(-6,3+3\mathrm{i}),(-6,3-3\mathrm{i})$$

所以方程(9.2-30)还有两个复解

$$\varphi_2(x)=-6x+3(1+\mathrm{i}),\varphi_3(x)=-6x+3(1-\mathrm{i})$$

由例 9.2.6 提供的解法，可以导出以下的定理。

定理 9.2.3 设积分方程

$$\varphi(x)=\int_a^b[A(t)x+B(t)]\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-35}$$

式中的 $A(t)$、$B(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上可积的实函数，则它除了有零解外，还有三个非零解，其中至少有一个为实函数。

与解例 9.2.6 相类似的步骤，可以得到方程(9.2-35)的解为

$$\varphi(x) = px + q \tag{9.2-36}$$

式中　p、q 满足下列方程组

$$\begin{cases} p^2\int_a^b t^2A(t)\mathrm{d}t + 2pq\int_a^b tA(t)\mathrm{d}t + q^2\int_a^b A(t)\mathrm{d}t = p \\ p^2\int_a^b t^2B(t)\mathrm{d}t + 2pq\int_a^b tB(t)\mathrm{d}t + q^2\int_a^b B(t)\mathrm{d}t = q \end{cases} \tag{9.2-37}$$

若从方程组(9.2－37)可解出 p(或 q)，所得到的关于 p 的方程是一个四次方程，其中有一个根为 0，因此这个四次方程的左端有一个 p 的因子，消去这个因子 p 以后，所得到的是一个实系数三次方程，它必有一个实根。

例 9.2.6 说明了齐次线性积分方程与齐次非线性积分方程的一个差别。对线性积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

来说，它的解依赖于参数 λ，且所有的解都是实的。但是，对于非线性积分方程(9.2－35)来说，除了有一个非零实解外，还有两个复解。

对于非线性积分方程(9.2－35)来说，解不依赖 λ 的值，这是与线性积分方程有非常明显差别的一个方面，即由于参数 λ 的作用，线性积分方程与非线性积分方程完全不同。

此外，上述解例 9.2.6 的方法，还适用于解下列形式的积分方程

$$\varphi(x) = Ex + F + \lambda\int_a^b [A(t)x + B(t)]\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-38}$$

此时方程的解仍为 x 的线性函数，但解依赖于 λ 的值，当然与线性积分方程依赖参数的意义不同。此外，也不能得到存在一个实解的结论，原因是方程组(9.2－37)中的每一个方程都增加了一个任意常数。在这种情况下，通常有四个非零解。

(2) $\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^l(t)\mathrm{d}t$ 型方程　可以考虑比方程(9.2－35)更一般的，形如

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi^l(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-39}$$

的积分方程。

除了当 $l=1$ 时线性方程的情况外，不失一般性，可设 $\lambda=1$。这是因为，作变换 $\varphi(x)=\lambda^m v(x)$，方程(9.2－39)化为

$$\lambda^m v(x) = \lambda^{ml+1}\int_a^b k(x,t)v^l(t)\mathrm{d}t$$

选取 m，使得 $ml+1=m$，即 $m=\frac{-1}{l-1}(l\neq 1)$就得到

$$v(x) = \int_a^b k(x,t)v^l(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-40}$$

此外，还假设核

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^n X_i(x)T_i(t) \tag{9.2-41}$$

而 $X_1(x)$，$X_2(x)$，…，$X_n(x)$构成一个线性无关的函数组。于是以下在讨论方程(9.2－40)时，可设 $\lambda=1$，且核取式(9.2－41)右端的形式，即考虑方程

$$u(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x)\int_a^b T_i(x)u^l(t)\mathrm{d}t$$

设

$$p_i = \int_a^b T_i(t) u^l(t) \mathrm{d}t \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.2-42}$$

于是

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) p_i \tag{9.2-43}$$

把式(9.2-43)代入式(9.2-42)中，得到

$$p_i = \int_a^b T_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} X_j(t) p_j \right]^l \mathrm{d}t \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.2-44}$$

方程组(9.2-44)是由 n 个关于待定系数 p_i 的 l 次代数方程构成的方程组。此方程组一般有 n^l 组解，其中有一组为平凡解，即 $p_i=0(i=1,2,\cdots,n)$。这是因为每一个 p_i 可以从解(n 个)次数为 $N=n^l$ 的、未知数的系数为实数的代数方程得到。

由于这些方程的形式为

$$p_i(A_i p_i^{N-1} + B_i p_i^{N-2} + \cdots) = 0 \tag{9.2-45}$$

只要 $N-1=n^l-1$ 是一个奇数(例如当 n 是一个偶整数)，方程组(9.2-45)就至少有一组实解 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是可得到以下的

定理 9.2.4 若积分方程(9.2-39)的核具有以下形式

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) T_i(t)$$

式中函数 $X_i(x)$是线性无关的，则积分方程(9.2-39)除了有零解 $\varphi(x)=0$ 外，一般有 $N-1=n^l-1$ 个解；只要 n 是一个偶整数，则其中至少有一个实解。

特别是，当 $l=2$ 时，方程(9.2-44)化为下列形式

$$p_i = \sum_{j,k} a_{jk}^{(i)} p_j p_k \tag{9.2-46}$$

式中

$$a_{jk}^{(i)} = a_{kj}^{(i)} = \int_a^b X_j(t) X_k(t) T_i(t) \mathrm{d}t \tag{9.2-47}$$

式(9.2-46)的右端是一个实二次型。

在上述情况下，有 n^2-1 个解，当 n 是一个偶整数时，至少有一个为实解。

在实际求解时，如果 n 不太大，利用 **Sylvester 析配法**对每个 p_i 求出**结式**，可能很容易求出解来。

例如，先从 $i=1$ 与 $i=2$ 对应的方程；从 $i=2$ 与 $i=3$ 对应的方程；…消去 p_1，就得到包含其余待定系数 $p_i(i=2,3,\cdots,n)$的 $l-1$ 个方程。然后依次消去这些 p_i，此过程一直继续到最后得到结式为止，这将得到一个形如(9.2-45)的 p_n 的 $N=n^l$ 次方程。

上述过程容易通过对方程组(9.2-33)、(9.2-34)的讨论来说明：

上述方程组可记为

$$p^2 + 3pq + 3q^2 - 3p = 0 \tag{9.2-48}$$

$$3p^2 + 8pq + 6q^2 + 12q = 0 \tag{9.2-49}$$

方程(9.2-48)、(9.2-49)依次乘以 p，可得到 p、p^2、p^3 的下列方程组

$$\begin{cases} p^2 + (3q - 3)p + 3q^2 = 0 \\ p^3 + (3q - 3)p^2 + 3q^2 p = 0 \\ 3p^2 + 8qp + 6q^2 + 12q = 0 \\ 3p^3 + 8qp^2 + (6q^2 + 12q)p = 0 \end{cases} \tag{9.2-50}$$

若(9.2－50)是一个关于 p、p^2、p^3 相容的方程组，则系数行列式必为零，于是得到以下的结式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3q - 3 & 3q^2 \\ 1 & 3q - 3 & 3q^2 & 0 \\ 0 & 3 & 8q & 6q^2 + 12q \\ 3 & 8q & 6q^2 + 12q & 0 \end{vmatrix} = 0$$

从而导出方程

$$3q(q^3 - 18q + 108) = 0$$

它的根为 0，－6，3(1＋i)与 3(1－i)。

例 9.2.7 解方程

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x + t)\varphi^2(t)\mathrm{d}t \tag{9.2-51}$$

解 式(9.2－37)中第一个方程化为

$$p^2 + 3pq + 3q^2 = 3p \tag{9.2-33}$$

第二个方程化为

$$3p^2 + 8pq + 6q^2 = 12q \tag{9.2-52}$$

方程组(9.2－33)、(9.2－52)的结式为

$$3q(q^3 + 24q^2 + 222q - 108) - 0$$

从上列方程解出 q，再求出 p，就可以得到积分方程(9.2－51)的解。

此外，由作图可看出(9.2－33)、(9.2－52)只有一组实解，于是方程(9.2－51)的精确到第 3 位小数的近似解为

$$\varphi(x) = 0.726x + 0.461$$

§9.3 非线性第一类 Fredholm 方程

对于**非线性第一类 Fredholm 方程**

$$\int_a^b F[x, t, \varphi(t)]\mathrm{d}t = f(x) \tag{9.3-1}$$

线性积分方程的 Schmidt-picard 定理不再有效。偶尔会出现下述情况：可能对某个所选取的数 μ，按下列迭代公式

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \mu\left\{\int_a^b F[x, t, \varphi_{n-1}(t)]\mathrm{d}t - f(x)\right\}$$

确定的函数序列$\{\varphi_n(x)\}$收敛。如果此序列收敛，则它收敛于方程(9.3－1)的某一个解(方程(9.3－1)的解可能不惟一)，这样所得的解依赖于所取的 μ 的值。

§9.4 非线性第二类 Volterra 方程

对于**非线性第二类 Volterra 方程**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x F[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t \tag{9.4-1}$$

在一定条件下，可以按下列迭代公式

$$\varphi_0(x) = f(x) \tag{9.4-2}$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^x F[x,t,\varphi_{n-1}(t)]\mathrm{d}t \tag{9.4-3}$$

用逐次逼近法求出解来。成立

定理 9.4.1 如果方程(9.4-1)中的 $f(x)$是$[a,X]$上的实连续函数，$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2$，$X$ 是一个有限的、待定的实数，$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2$($m_1,m_2$ 为实常数)，$F[x,t,u]$当 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant X$，$p\leqslant u\leqslant q$($p,q$ 是使 $p<m_1\leqslant m_2<q$ 成立的已知实数)时为实连续函数，$|F(x,t,u|\leqslant A$(A 为正常数)，且关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|F(x,t,u_2) - F(x,t,u_1)| \leqslant C|u_2 - u_1| \tag{9.4-4}$$

式中C 为正常数，那么，当 λ 满足条件

$$|\lambda| < \min\left(\frac{m_2 - p}{A(b-a)},\frac{q - m_1}{A(b-a)}\right) \tag{9.4-5}$$

时，方程(9.4-1)存在惟一解。

证明 当条件(9.4-4)满足时，对任何正整数 n，由式(9.4-3)确定的 $\varphi_n(x)$都满足 $p\leqslant\varphi_n(x)\leqslant q$，这样就能保证由式(9.4-2)、(9.4-3)总能依次确定出 $\varphi_n(x)$来。

先证明$\{\varphi_n(x)\}$的收敛性。这只要证明级数 $\sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]$ 收敛就可以了。

依次估计

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = |\lambda\int_a^x F[x,t,\varphi_0(t)]\mathrm{d}t| \leqslant |\lambda|A(x-a)$$

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = |\lambda\int_a^x \{F[x,t,\varphi_1(t)] - F[x,t,\varphi_0(t)]\}\mathrm{d}t|$$

$$\leqslant |\lambda|c\int_a^t |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|\mathrm{d}t \leqslant |\lambda|c|\lambda|A\frac{(x-a)^2}{2!}$$

由数学归纳法可证明，对于任意正整数 j，有以下估计

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \leqslant A|\lambda|^j c^{j-1}\frac{(x-a)^j}{j!}$$

于是，对于满足式(9.4-5)的任意 λ，级数

$$\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty}[\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]$$

在$[a,b]$上绝对且一致收敛，它的和函数 $\varphi(x)$就是积分方程(9.4-1)的解。

再证惟一性。如果方程(9.4-1)还有解 $\psi(x)$，则

$$\varphi(x) - \psi(x) = \lambda\int_a^x \{F[x,t,\varphi(t)] - F[x,t,\psi(t)]\}\mathrm{d}t$$

由条件式(9.4-4)，得

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|c\int_a^x|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t$$

以上不等式两端关于 x 从 a 到 x 积分，并交换积分顺序，就有

$$\begin{aligned}\int_a^x|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x&\leqslant|\lambda|c\int_a^x\left[\int_a^x|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\\&=|\lambda|c\int_a^x\left(\int_t^x\mathrm{d}x\right)|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\\&=|\lambda|c\int_a^x(x-t)|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant|\lambda|c(X-a)\int_a^x|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

取待定常数 X 满足

$$X<a+\frac{1}{|\lambda|c}$$

于是 $|\lambda|c(X-a)<1$，因此

$$\int_a^x|\varphi(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x=0$$

即
$$\varphi(x)=\psi(x)\quad(a\leqslant x\leqslant X)$$

因此方程(9.4-1)的解惟一。

零次近似也可取为满足条件 $p\leqslant\varphi_0(x)\leqslant q$ 的任意连续函数 $\varphi_0(x)$。

上述非线性第二类 Volterra 方程的解法，对非线性第二类 Volterra 积分方程组也适用。

例 9.4.1 求积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{1+[\varphi(t)]^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\tag{9.4-6}$$

的近似解。

解 取零次近似 $\varphi_0(x)=0$，于是

$$\varphi_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x\frac{1+\arctan^2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3x$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)&=\int_0^x\frac{1+\left(\arctan t+\frac{1}{3}\arctan^3t\right)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3x+\frac{2}{3.5}\arctan^5x+\frac{1}{7.9}\arctan^7x\end{aligned}$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x\frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3x+\frac{2}{3.5}\arctan^5x+$$
$$\frac{17}{5\cdot7\cdot9}\arctan^7x+\frac{38}{5\cdot7\cdot9^2}\arctan^9x+\frac{134}{9\cdot11\cdot21\cdot25}\arctan^{11}x+\cdots$$

记 $\arctan x=u$，把 $\varphi_n(x)$的表达式与下列展开式

$$\tan u=\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}\frac{2^{2v}(2^{2v}-1)}{(2v)!}B_{2v}u^{2v-1}\quad\left(|u|<\frac{\pi}{2}\right)$$

相比较，式中 B_v 为 Bernoulli 数，可得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \tan(\arctan x) = x$$

$\varphi(x)=x$ 是方程(9.4－6)的精确解。

§9.5　非线性第一类 Volterra 方程

在一定的条件下，非线性第一类 Volterra 积分方程，通过关于 x 求导两次再积分，化为等价的非线性第二类 Volterra 方程。

对于**非线性第一类 Voterra 方程**

$$\int_a^x F[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t = f(x) \tag{9.5-1}$$

为使它有解，显然要满足条件

$$f(a) = 0 \tag{9.5-2}$$

设 $f(x)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上导数存在且连续；$F(x,t,u)$在 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$，$p\leqslant u\leqslant q$ 上的一阶偏导数连续，p、q 为已知常数，且设 $F'_u(x,t,u)\neq 0$，于是(9.5－1)确是以 $\varphi(x)$为未知函数的积分方程。

方程(9.5－1)的两端关于 x 求导。若 $\varphi(x)$是方程(9.5－1)的解，则 $\varphi(x)$就满足

$$F[x,x,\varphi(x)] + \int_a^x F'_x[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t = f'(x) \tag{9.5-3}$$

记 $\varphi(a)=u_0$，此时还成立

$$F(a,a,u_0) = f'(a) \tag{9.5-4}$$

反过来，由于条件(9.5－2)成立，所以满足方程(9.5－3)的函数 $\varphi(x)$，也满足原积分方程(9.5－1)。因此，在条件(9.5－2)成立的情况下，积分方程(9.5－1)与(9.5－2)是等价的。

对于方程(9.5－3)，如果设 $f(x)$有二阶连续导函数，$F(x,t,u)$关于 x 的二阶偏导数连续。对(9.5－3)的两端关于 x 求导，若 $\varphi(x)$ 是方程(9.5－3)的解，则 $\varphi(x)$就满足以下**非线性积分微分方程**

$$2F'_x[x,x,\varphi(x)] + F'_t(x,x,\varphi(x)) + F'_u(x,x,\varphi(x)]\varphi'(x) + \int_a^x F''_{xx}[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t = f''(x) \tag{9.5-5}$$

反过来，若 $\varphi(x)$满足式(9.5－5)，则对式(9.5－5)两端关于 x 积分，得

$$F[x,x,\varphi(x)] + \int_a^x F'_x[x,t,\varphi(t)]\mathrm{d}t = f'(x) + C$$

令 $x=a$，由式(9.5－4)，得 $C=0$，于是就得到式(9.5－3)，这表明方程(9.5－5)与(9.5－3)等价，而式(9.5－3)在条件(9.5－2)成立时与式(9.5－1)等价，因此方程(9.5－5)在式

注　Bernoulli 数

除了 $B_1=-\frac{1}{2}$外，所有奇数指数的 Bernoulli 数 B_{2n+1}都为零

$$B_0=1$$

B_{2v}由以下递推公式确定

$$B_{2v}=-\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2v-2}\frac{2v\ (2v-1)\ \cdots\ (2v-2k+2)}{k!}B_k$$

(9.5－2)成立时与式(9.5－1)等价。

由于在 $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$，$p\leqslant u\leqslant q$ 时 $F'_u(x,t,u)\neq 0$，式(9.5－5)两端除以 $F'_u[x,x,\varphi(x)]$，并把 x 换为 v，得到

$$\varphi'(v)=\frac{f''(v)-2F'_x[v,v,\varphi(v)]-F'_t[v,v,\varphi(v)]}{F'_u[v,v,\varphi(v)]}-\int_a^v\frac{F''_{xx}[v,t,\varphi(t)]}{F'_u[v,v,\varphi(v)]}\mathrm{d}t \tag{9.5-6}$$

上式两端关于 v 从 a 到 x 积分，就可知：如果 $\varphi(x)$ 是积分微分方程(9.5－5)的解，则 $\varphi(x)$ 也满足积分方程

$$\varphi(x)=u_0+\int_a^x\frac{f''(v)-2F'_x[v,v,\varphi(v)]-F_t[v,v,\varphi(v)]}{F'_u[v,v,\varphi(v)]}\mathrm{d}v-\int_a^x\int_a^v\frac{F''_{xx}[v,t,\varphi(t)]}{F_u{}'[v,v,\varphi(v)]}\mathrm{d}t\mathrm{d}v \tag{9.5-7}$$

反过来，若函数 $\varphi(x)$ 满足方程(9.5－7)，则显然成立 $\varphi(a)=u_0$，再对它的两端关于 x 求导，就得到式(9.5－6)。于是方程(9.5－7)与方程(9.5－6)即式(9.5－5)等价。而方程(9.5－5)在条件(9.5－2)下与(9.5－1)等价，因此在(9.5－2)成立时，方程(9.5－7)与(9.5－1)等价。这样，解非线性第一类 Volterra 方程(9.5－1)，化为求解等价的非线性第二类 Volterra 方程(9.5－7)。

对于方程(9.5－7)，当 $F(x,t,u)$ 的一阶偏导数和关于 x 的二阶偏导数对于变量 u 满足 Lipschitz 条件时，就可以用逐次逼近法求出解来。

参 考 文 献

1 陈传璋等著．积分方程论及其应用，第1版．上海：上海科学技术出版社，1987

2 Краснов，М. Л. и. др.，Интегральные Уравнения，изд 2-е，Москва：“Наука”，1976

习 题

1. 解方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x[1+\varphi(t)]^2\mathrm{d}t$$

2. 求下列积分方程的二次近似解。

(1) $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^x\{1+x[\varphi(t)]^2\}\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x)=\int_0^x\sqrt{1+\varphi^2(t)}\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x)=\int_0^1(x+t)^2\varphi^2(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x)=\int_0^x te^{\varphi(t)}\mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x)=\int_0^x(t^2-\varphi^2(t))\mathrm{d}t$

(6) $\varphi(x)=x-\pi+\int_0^x t\sin\varphi(t)\mathrm{d}t$

(7) $\varphi(x) = 1 + \int_0^x [\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2] \mathrm{d}t$

3. 求下列方程的三次近似解。

(1) $\varphi(x) = \int_0^x [1 + \varphi^2(t)] \mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = \int_0^x [t\varphi^2(t) - 1] \mathrm{d}t$

4. 解下列积分方程。

(1) $\varphi(x) = 2\int_0^1 xt\varphi^3(t) \mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\varphi^2(t) \mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x) = \int_0^1 x^2t^2\varphi^2(t) \mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 \frac{x_t}{1 + \varphi^2(t)} \mathrm{d}t$

(5) $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{xt}{1 + \varphi^2(t)} \mathrm{d}t$

5. 若 $\int_0^1 a^2(x) \mathrm{d}x > 1$，求证：积分方程

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)a(t)[1 + \varphi^2(t)] \mathrm{d}t$$

没有实解，式中 $a(x)>0, x \in [0,1]$。

附录 1　广义 Leibnitz 公式

广义 Leibnitz 公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t + F[x,\beta(x)]\beta'(x) - F[x,\alpha(x)]\alpha'(x) \tag{1}$$

是 Newton-Leibnitz 公式的推广

证明　设

$$\varphi(\alpha,\beta,x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F[x,t]\mathrm{d}t \tag{2}$$

式中

$$F(x,t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \tag{3}$$

于是

$$\varphi(\alpha,\beta,x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t = f[x,\beta(x)] - f[x,\alpha(x)] \tag{4}$$

由复合函数求导法则

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\beta'(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\alpha'(x)$$

设积分号下求偏导数的条件满足，对(2)式两端关于 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t \tag{5}$$

由式(4)、(3)，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\beta} = F(x,\beta) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial f(x,\beta)}{\partial\alpha} \quad \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \quad F(x,\alpha) \tag{7}$$

再由式(5)、(6)、(7)、(4)，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t + F(x,\beta)\beta'(x) - F(x,\alpha)\alpha'(x)$$

附录 2　特殊核的 Fredholm 行列式表

核 $k(x,\xi)$	区　间	Fredholm 行列式 $D(\lambda)$
$k(x)$或$k(\xi)$	$[a,b]$	$1-\lambda\int_a^b k(\xi)\mathrm{d}\xi$
$k_1(x)\cdot k_2(\xi)$	$[a,b]$	$1-\lambda\int_a^b k_1(\xi)k_2(\xi)\mathrm{d}\xi$
$x\cdot\xi$	$[0,a]$	$1-\lambda\frac{a^3}{3}$
$x+\xi$	$[0,a]$	$1-\lambda a^2-\frac{1}{12}\lambda^2a^4$
$\mathrm{e}^{x+\xi}$	$[0,a]$	$1-\lambda\left(\frac{\mathrm{e}^{2a}}{2}-\frac{1}{2}\right)$
$x^2+\xi^2$	$[0,a]$	$1-\lambda\frac{2a^3}{3}-\lambda^2\frac{4a^6}{45}$
$x\xi+\xi^2$	$[0,a]$	$1-\lambda\frac{2a^3}{3}-\lambda^2\frac{a^6}{72}$
$\sin x\sin\xi$	$[0,a]$	$1-\lambda\left(\frac{a}{2}-\frac{\sin 2a}{4}\right)$
± 1	$[0,1]$	$1\mp\lambda$
$x\xi(x+\xi)$	$[0,1]$	$1-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{240}\lambda^2$

附录 3　特征函数表

以下列出一些以正交函数系为特征函数的第二类 Fredholm 积分方程的特征值与特征函数。

1.
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

式中
$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(l-t)}{l} & (x\leqslant t)\\[2mm] \dfrac{t(l-x)}{l} & (t\leqslant x)\end{cases}$$

特征值
$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\quad(n=1,2,\cdots)$$

对应的特征函数
$$\varphi_n(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(n=1,2,\cdots)$$

2.
$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-1}^1\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

式中
$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-t} & (x\leqslant t)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-x} & (t\leqslant x)\end{cases}$$

特征值
$$\lambda_n=n(n+1)\quad(n=1,2,\cdots)$$

特征函数
$$\varphi_n(x)=P_n(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

式中 $P_n(x)$**为 Legendre 多项式**，它的定义为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

由 $P_0(x)=1$ 及 $P_1(x)=x$，利用递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x)=x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)$$

可以求出任何次 Legendre 多项式。

3.
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\infty k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

式中
$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2v}\left(\dfrac{x}{t}\right)^v & (x\leqslant t)\\[2mm] \dfrac{1}{2v}\left(\dfrac{t}{x}\right)^v & (t\leqslant x)\end{cases}$$

特征值
$$\lambda_n=\alpha_n^2$$

式中　α_n 是超越方程 $\mathrm{J}_v(\alpha)=0$ 的根。

特征函数
$$\varphi_n(x)=\mathrm{J}_v(\alpha_n x)$$

这里 $\mathrm{J}_\gamma(x)$是 v **阶第一类 Bessel 函数**。

第一类 Bessel 函数定义为

$$\mathrm{J}_v(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

4.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\infty}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

式中

$$k(x,t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{x+t}{2}}\int_t^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\mathrm{d}\tau & (x\leqslant t)\\ \mathrm{e}^{\frac{x+t}{2}}\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\mathrm{d}\tau & (t\leqslant x)\end{cases}$$

特征值

$$\lambda_n=n+1$$

特征函数

$$\varphi_n(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$$

式中 $\mathrm{L}_n(x)$为 **Chebyshev-Laguerre 多项式**，它的定义为

$$\mathrm{L}_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^n\mathrm{e}^{-x}]$$

由 $\mathrm{L}_0(x)=1$ 及 $\mathrm{L}_1(x)=-x+1$ 利用递推公式

$$\mathrm{L}_{n+1}(x)=(2n+1-x)\mathrm{L}_n(x)-n^2\mathrm{L}_{n-1}(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

可以得到任何次的 Chebyshev-Laguerre 多项式。

5.

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

式中

$$k(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2+t^2}{2}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau & (x\leqslant t)\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2+t^2}{2}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau & (t\leqslant x)\end{cases}$$

特征值

$$\lambda_n=2(n+1)\quad(n=0,1,\cdots)$$

特征函数

$$\varphi_n(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{H}_n(x)\quad(n=0,1,\cdots)$$

式中 $\mathrm{H}_n(x)$为 **Chebyshev-Hermite 多项式**，它的定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(x)&=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[\mathrm{e}^{-x^2}]\\&=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}\times\\&\quad(2x)^{n-4}+\cdots\end{aligned}$$

由 $\mathrm{H}_0(x)=1$ 及 $\mathrm{H}_1(x)=2x$ 利用递推公式

$$\mathrm{H}_{n+1}(x)=2x\mathrm{H}_n(x)-2n\mathrm{H}_{n-1}(x)$$

可以求出任何次 Chebyshev-Hermite 多项式。

附录 4　$L_2(a,b)$空间

如果积分

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

存在(取有限值)，则称 $f(x)$在$[a,b]$上为**平方可积**，在$[a,b]$上**平方可积的函数类**，记为 $L_2(a,b)$或 L_2。

1．L_2 类函数的基本性质

(1) 若 $f(x)\in L_2$，$g(x)\in L_2$，则 $f(x)g(x)\in L_2$，$f(x)\pm g(x)\in L_2$

(2) 若 $f(x)\in L_2$，λ为任意实数，则 $\lambda f(x)\in L_2$

(3) 若 $f(x)\in L_2$，$g(x)\in L_2$，则成立 Bunyakovskii-Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

(4) 若 $f(x)\in L_2$，$g(x)\in L_2$，则成立三角不等式

$$\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$$

式中$\| f \|$是 $f(x)$的模

$$\| f \| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$

而(f,g)是 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上的内积

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$f(x)$与 $g(x)$的距离定义为

$$\| f-g \| = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

记为 $\rho(f(x),g(x))$。1905 年 Hilbert 在研究积分方程理论时，曾引入这种距离的概念来估计两个函数的误差。

设 $f(x)\in L_2(a,b)$，$g(x)\in L_2(a,b)$，如果仅在测度为零的集合上 $f(x)\neq g(x)$，即 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上几乎处处相等，则称 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上等价，即可以把它们看成在 L_2 中为同一个元素。

对平方可积函数类 L_2 规定了上述的内积和模以后，就称为一个 L_2 空间。

2．平方平均收敛

设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$都属于 $L_2(a,b)$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x = 0$$

则称函数序列$\{f_n(x)\}$**平方平均收敛**于函数 $f(x)$，简称$\{f_n(x)\}$**平均收敛**于 $f(x)$。

如果平方可积函数序列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，则$f(x)\in L_2$，且$\{f_n(x)\}$平方平均收敛于$f(x)$。

对于一个平方可积的函数序列$\{f_n(x)\}$，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$及$m>N$时，使得

$$\int_a^b |f_n(x)-f_m(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon$$

成立，则称序列$\{f_n(x)\}$平方平均收敛。满足上述不等式的序列，称为**基本序列**。

序列$\{f_n(x)\}$平方平均收敛于某个函数的充分必要条件是，这个序列是一个基本序列。

任何在L_2中的基本函数序列收敛于L_2中的函数，这种性质称为空间L_2的**完全性**或**完备性**。

3. 标准正交函数系的完备性

设$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上一个(无限的)标准正交函数系，即成立

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (k=l) \\ 0 & (k\neq l) \end{cases}$$

记

$$I_n = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k\varphi_k(x) \right|^2 \mathrm{d}x > 0$$

式中

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x$$

是$f(x)$关于$\{\varphi_k(x)\}$展开的 Fourier 系数

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k\varphi_k(x)$$

容易证明

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^n |f_k|^2 \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^\infty |f_k|^2 + \sum_{k=n+1}^\infty |f_k|^2 \end{aligned}$$

因此，部分和序列$\sum\limits_{k=1}^n f_k\varphi_k(x)$平方平均收敛于$f(x)$的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

即对于任何平方可积函数$f(x)$，Parseval 等式

$$\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^\infty |f_k|^2$$

成立。

使上述 Parseval 等式成立的标准正交函数系$\{\varphi_k(x)\}$，称为**完备**的或**封闭**的。

直观地说，"完备"是指，为了使平方可积函数$f(x)$能展开，函数系$\{\varphi_k(x)\}$中每一个函数都是必需的，如果缺少某一个，某些平方可积函数就不能用$\varphi_k(x)$的级数表示出来。

附录 5 常微分方程定解问题 Green 函数的求法

如果能求出常微分方程边值问题的 Green 函数，就可以把此边值问题化为等价的积分方程，以下介绍常微分方程边值问题 Green 函数的求法。

已知 n 阶常微分方程为

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

式中函数 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b]$ 上 $p_0(x) \neq 0$，边界条件为

$$\begin{aligned} V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \\ \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \cdots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \\ (k = 1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{2}$$

设上述 $y(a), y'(a), \cdots, y^{(n-1)}(a), y(b), \cdots, y^{(n-1)}(b)$ 的一次式 V_1，V_2，…，V_n 是线性独立的。

定义 设 ξ 为 (a,b) 中的任意点：$a<\xi<b$，具有以下四个性质的函数 $G(x,\xi)$，称为边值问题(1)、(2)的 **Green 函数**：

(1) 在 $a \leqslant x \leqslant b$，$G(x,\xi)$ 本身及关于 x 的不高于 $n-2$ 的各阶导数(包括 $n-2$ 阶导数)连续；

(2) $G(x,\xi)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶导数，以 $x=\xi$ 为第一类间断点，且跃度为 $-\dfrac{1}{p_0(\xi)}$，即

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p_0(\xi)} \tag{3}$$

(3) 作为 x 的函数，$G(x,\xi)$ 在 $[a,\xi)$ 及 $(\xi,b]$ 是方程(1)的解

$$L[G] = 0$$

(4) 满足边界条件(2)

$$V_k(G) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

成立下列

定理 1 如果边值问题(1)、(2)只有零解 $y(x)\equiv 0$，则算子 L 有一个且只有一个 Green 函数。

证明 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为方程(1)的线性无关解。由性质(3)，函数 $G(x,\xi)$ 在区间 $[a,\xi)$ 及 $(\xi,b]$ 可由上述线性无关解表出，即有下列表达式

$$\begin{aligned} G(x,\xi) = a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + \cdots + a_ny_n(x) \quad (a \leqslant x < \xi) \\ G(x,\xi) = b_1y_1(x) + b_2y_2(x) + \cdots + b_ny_n(x) \quad (\xi < x \leqslant b) \end{aligned} \tag{4}$$

式中 a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 是 ξ 的函数。

为了确定 $G(x,\xi)$，只要确定 a_k，$b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 就可以了。为此先由函数 $G(x,\xi)$ 及它关于 x 的前 $n-2$ 阶导数在点 $x=\xi$ 的连续性，导出下列关系式

$$[b_1y_1(\xi) + \cdots + b_yy_n(\xi)] - [a_1y_1(\xi) + \cdots + a_ny_n(\xi)] = 0$$

$$[b_1y_1'(\xi) + \cdots + b_yy_n'(\xi)] - [a_1y_1'(\xi) + \cdots + a_ny_n'(\xi)] = 0$$

……

$$[b_1y_1^{(n-2)}(\xi) + \cdots + b_yy_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1y_1^{(n-2)}(\xi) + \cdots + a_ny_n^{(n-2)}(\xi)] = 0$$

而式(3)为

$$[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \cdots + b_y y_n^{(n-1)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \cdots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = \frac{-1}{p_0(\xi)}$$

设 $\quad c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \quad (k = 1,2,\cdots,n)$ (5)

则得到关于 $c_k(\xi)$ 的线性方程组

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \cdots + c_n y_n(\xi) = 0 \\ c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \cdots + c_n y_n'(\xi) = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \cdots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{-1}{p_0(\xi)} \end{cases} \tag{6}$$

方程组(6)的系数行列式就是 Wronski 行列式 $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 在点 $x=\xi$ 的值，它不为零(由于 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性无关)。因此，由方程组(6)可单值确定函数 $c_k(\xi)(k=1,2,\cdots,n)$。

以下再由边界条件(2)来确定函数 $a_k(\xi)$、$b_k(\xi)$，把式(2)中的 $V_k(y)$ 分为两部分

$$V_k(y) = A_k(y) + B_k(y)$$

式中

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a)$$

$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \cdots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b)$$

由式(4)

$$\begin{aligned} A_k(G) &= \alpha_k G(a) + \alpha_k^{(1)} G'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} G^{(n-1)}(a) \\ &= \alpha_k[a_1 y_1(a) + a_2 y_2(a) + \cdots + a_n y_n(a)] + \\ &\quad \alpha_k^{(1)}[a_1 y_1'(a) + a_2 y_2'(a) + \cdots + a_n y_n'(a)] + \cdots + \\ &\quad \alpha_k^{(n-1)}[a_1 y_1^{(n-1)}(a) + a_2 y_2^{(n-1)}(a) + \cdots + a_n y_n^{(n-1)}(a)] \\ &= a_1[\alpha_k y_1(a) + \alpha_k^{(1)} y_1'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y_1^{(n-1)}(a)] + \\ &\quad a_2[\alpha_k y_2(a) + \alpha_k^{(1)} y_2'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y_2^{(n-1)}(a)] + \cdots + \\ &\quad a_n[\alpha_k y_n(a) + \alpha_k^{(1)} y_n'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y_n^{(n-1)}(a)] \\ &= a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + \cdots + a_n A_k(y_n) \end{aligned}$$

同理

$$B_k(G) = b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \cdots + b_n B_k(y_n)$$

由性质(4)即式(2)可得

$$V_k(G) = A_k(G) + B_k(G) = 0$$

即

$$a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + \cdots + a_n A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) + \cdots + b_n B_k(y_n) = 0$$
$$(k = 1,2,\cdots,n)$$

又由式(5)

$$a_k = b_k - c_k$$

因此

$$(b_1 - c_1)A_k(y_1) + (b_2 - c_2)A_k(y_2) + \cdots + (b_n - c_n)A_k(y_n) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) +$$

$$\cdots + b_n B_k(y_n) = 0 \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

于是

$$b_1 V_k(y_1) + b_2 V_k(y_2) + \cdots + b_n V_k(y_n)$$
$$= c_1 A_k(y_1) + c_2 A_k(y_2) + \cdots + c_n A_k(y_n) \quad (k = 1,2,\cdots n) \tag{7}$$

方程组(7)是 b_1，b_2，…，b_n 的线性方程组，由于 V_1，V_2，…，V_n 线性无关，故方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_n) \\ V_2(y_2) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \cdots & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

因此，方程组(8)的解 $b_1(\xi),b_2(\xi),\cdots,b_n(\xi)$ 存在且惟一。而由 $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$，可知 $a_k(\xi)(k=1,2,\cdots,n)$ 也存在且惟一，利用式(4)就可得到 $G(x,\xi)$。这样就证明了 Green 函数的存在惟一性。

上述证明，同时提供了构造 Green 函数的方法。

如果边值问题式(1)、(2)是自共轭边值问题，则对应的 Gree 函数是对称的，即

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

如果在区间的一个端点(例如 $x=a$)，方程最高阶导数的系数 $p_0(a)$ 为零，则在 $x=a$ 规定解为有界作为**自然边界条件**，而在另一端点要求满足通常的边界条件（见以下的例 2)。

以下讨论一种重要的特殊情况，即**二阶常微分方程边值问题**

$$\begin{cases} [p(x)y']' + q(x)y = 0 & (8) \\ (y(a) = y(b) = 0 & (9) \end{cases}$$

的 Gree 函数的求法，式中 $p(x)\neq 0, a\leqslant x\leqslant b; p(x)\in c^{(1)}[a,b]$

设 $y_1(x)$ 是满足初始条件 $y_1(a)=0$，$y_1'(a)=\alpha\neq 0$ 的方程(8)的解。一般来说，此解不一定满足第二个边界条件，因此可设

$$y_1(b) \neq 0$$

于是显然有，形如 $c_1y_1(x)$ 的函数(c_1 为任意常数)是方程(8)的解，且满足边界条件

$$c_1 y_1(a) = 0$$

类似地可得到，方程(8)满足第二个边界条件，即 $y_2(b)=0$ 的非零解 $y_2(x)$ 所对应的解族 $c_2y_2(x)$(c_2 为任意常数)满足条件

$$c_2 y_2(b) = 0$$

于是问题(8)、(9)的 Green 函数为

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) & (a \leqslant x \leqslant \xi) \\ c_2 y_2(x) & (\xi \leqslant x \leqslant b) \end{cases} \tag{10}$$

式中常数这样来选取，使得性质(1)、(2)能满足，也就是要使函数 $G(x,\xi)$ 在 ξ 固定时关于 x 连续，特别是，应在点 $x=\xi$ 连续：

$$c_1 y(\xi) = c_2 y_2(\xi)$$

且使 $G_x'(x,\xi)$ 在点 $x=\xi$ 跃度为 $\dfrac{-1}{p(\xi)}$，即应有

$$c_2y_2'(\xi) - c_1y_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$$

即

$$c_1y_1(\xi) - c_2y_2(\xi) = 0, \quad c_1y_1'(\xi) - c_2y_2'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \tag{11}$$

方程组(11)的系数行列式是 y_1、y_2 的 Wronski 行列式在 $x=\xi$ 的值取负，即

$$-W[y_1(x), y_2(x)]|_{x=\xi} \equiv -w(\xi)$$

由于已设 $y_1(b)\neq 0$，可知方程(8)的解$y_1(x)$与 $y_2(x)$是线性无关的。这是由于，与 $y_1(x)$ 线性相关的解为 $c_1y_1(x)$，因为 $y_1(b)\neq 0$，因此当 $c_1\neq 0$ 时，在点 $x=b$，$c_1y_1(x)$不为零，而所选取的解 $y_2(x)$在 $x=b$ 时为零，故 $y_1(x)$与 $y_2(x)$线性无关。于是有 $w(\xi)\neq 0$，从而由方程组(11)可确定 c_1、c_2

$$c_1 = \frac{y_2(\xi)/p(\xi)}{-w(\xi)} = -\frac{y_2(\xi)}{p(\xi)w(\xi)}$$

$$c_2 = \frac{y_1(\xi)/p(\xi)}{-w(\xi)} = -\frac{y_1(\xi)}{p(\xi)w(\xi)}$$

代入式(10)，就得到 Green 函数

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{-y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)w(\xi)} & (a \leqslant x \leqslant \xi) \\ \dfrac{-y_1(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)w(\xi)} & (\xi \leqslant x \leqslant b) \end{cases} \tag{12}$$

以下介绍把边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 & (13) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B & (14) \end{cases}$$

化为问题(8)、(9)的方法。

首先在线性方程(13)的两端乘以因子 $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$，此时 $q(x)$为 $p(x)p_2(x)$，于是(13)就化为形如式(8)的方程。

再作未知函数的线性代换

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A$$

这样，边界条件(14)化为齐次边界条件

$$z(a) = y(a) - A = 0, \; z(b) = y(b) - B - A - A = y(b) - B = 0$$

在上述代换下，方程(13)的线性仍保持，但与(8)式不同，所得到的方程为带自由项 $f(x)$的方程

$$L(z) = f(x)$$

式中
$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x) - \frac{B-A}{b-a}p(x)p_1(x)$$

这样，就可以按求问题(8)、(9)Green 函数同样的方法，求齐次边值问题 $L(z)=0$，$z(a)=z(b)=0$ 的 Green函数。

例 1 求齐次边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} = 0 & (15) \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0 & (16) \end{cases}$$

的 Green 函数。

解 首先证明，上列边值问题只有零解。这是因为，方程的基本解组为

$$1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3 \tag{17}$$

通解为

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

式中 A，B，C，D 为任意常数。

由边界条件(16)，可得到 A、B、C、D 应满足下列四个关系式

$$y(0) = A = 0,\quad y'(0) = B = 0$$

$$y(1) = A + B + C + D = 0,\quad y'(1) = B + 2C + 3D = 0$$

因此，$A=B=C=D=0$，于是问题(15)、(16)只有零解 $y(x)\equiv 0$，由定理 1 可知，可以构造 Green 函数，且此 Green 函数是惟一的。

由基本解组(17)，可设 Green 函数具有以下形式

$$G(x,\xi) = a_1\cdot 1 + a_2\cdot x + a_3\cdot x^2 + a_4\cdot x^3\quad (0\leqslant x\leqslant \xi) \tag{18}$$

$$G(x,\xi) = b_1\cdot 1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3\quad (\xi\leqslant x\leqslant 1) \tag{19}$$

式中 a_1，…，a_4；b_1，…，b_4 为 ξ 的待定函数。

设

$$c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)\qquad (k = 1,2,3,4)$$

由方程组(6)可得确定函数 $c_k(\xi)$的线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 = 0 \\ c_2 + c_3 2\xi + c_4\cdot 3\xi^2 = 0 \\ c_3\cdot 2 + c_4\cdot 6\xi = 0 \\ c_4\cdot 6 = 1 \end{cases}$$

解之，得

$$c_1(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^3,\ c_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2,\ c_3(\xi) = -\frac{1}{2}\xi,\ c_4(\xi) = \frac{1}{6} \tag{20}$$

由于 Green 函数应具有性质(4)，即应满足边界条件(2)，因此对问题(15)、(16)应成立

$$G(0,\xi) = 0,\quad G'_x(0,\xi) = 0$$

$$G(1,\xi) = 0,\quad G'_x(1,\xi) = 0$$

于是得到

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

但 $c_k=b_k-a_k(k=1,2,3,4)$，由式(20)、(21)可得

$$a_1 = 0,\quad b_1 = c_1 + a_1 = -\frac{1}{6}\xi^3,\quad a_2 = 0,\quad b_2 = c_2 + a_2 = \frac{1}{2}\xi^2$$

而

$$\begin{cases} b_3 + b_4 = -b_1 - b_2 = \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{2}\xi^2 \\ 2b_3 + 3b_4 = -b_2 = -\frac{1}{2}\xi^2 \end{cases}$$

从而

$$b_3 = \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2, \quad b_4 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3$$

进而就有

$$a_3 = b_3 - c_3 = \frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3$$

$$a_4 = b_4 - c_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3$$

把以上所求出的系数 a_k、$b_k(k=1,2,3,4)$代入式(18)、(19)，就得到问题(15)、(16)的 Green 函数

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3\right)x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3 & (0 \leqslant x \leqslant \xi) \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x + \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3 & \\ = \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\xi^3 & (\xi \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

由此可见

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

即此问题的 Green 函数是对称的。由于此边值问题是一个自共轭边值问题，因此预先就可知道所求出的 Green 函数具有这种对称性。

例 2 求齐次边值问题

$$\begin{cases} xy'' + y' = 0 & (22) \\ y(1) = \alpha y'(1) \quad \alpha \neq 0 & (23) \\ \text{当 } x \to 0 \text{ 时} \quad y(x) \text{ 有界} & \end{cases}$$

解 首先求方程(22)的通解，由此可证明，仅当 $y(x)\equiv 0$ 时，才成立式(23)。为此，记

$$y'(x) = z(x)$$

则有

$$xz' + z = 0$$

于是

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$$

所以

$$\ln|z| = \ln\frac{c_1}{x}$$

因此

$$z = \frac{c_1}{x}$$

即

$$y' = \frac{c_1}{x}$$

所以

$$y(x) = c_1\ln x + c_2$$

由此可知，当 $c_1=c_2=0$ 时，才能使式(23)成立。由定理 1，可以构造问题(22)、(23)的 Green 函数。设

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 + a_2\ln x & (0 < x \leqslant \xi) \\ b_1 + b_2\ln x & (\xi \leqslant x \leqslant 1) \end{cases} \tag{24}$$

为了使 $G(x,\xi)$在 $x=\xi$ 具有连续性，应有

$$b_1 + b_2\ln\xi - a_1 - a_2\ln\xi = 0 \tag{25}$$

而在 $x=\xi$，$G_2'(x,\xi)$的跃度为$-\frac{1}{\xi}$，就要求

$$b_2\frac{1}{\xi} - a_2\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi}$$

所以
$$b_2 - a_2 = -1 \tag{26}$$

记
$$c_2 = b_2 - a_2,\quad c_1 = b_1 - a_1 \tag{27}$$

由式(25)、(26)可得

$$\begin{cases} c_1 + c_2\ln\xi = 0 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

于是

$$c_1 = \ln\xi,\quad c_2 = -1 \tag{28}$$

而由条件(23)，当 $x\to 0$ 时，$G(x,\xi)$为有界，可知 $a_2=0$。由 $G(1,\xi)=\alpha G_x'(1,\xi)$可知，$b_1=\alpha b_2$。由式(27)、(28)得到

$$b_2 = a_2 - 1 = -1$$

$$a_1 = b_1 - c_1 = \alpha b_2 - \ln\xi = -\alpha - \ln\xi$$

$$a_2 = 0$$

$$b_1 = \alpha b_2 = -\alpha$$

$$b_2 = -1$$

于是所求的 Green 函数

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -(\alpha + \ln\xi) & (0 < x \leqslant \xi) \\ -(\alpha + \ln x) & (\xi \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

例 3 求边值问题

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数。

解 容易验证，解 $y_1(x)=\sin kx$ 满足边界条件 $y_1(0)=0$，而解 $y_2(x)=\sin k(x-1)$满足条件 $y_2(1)=0$。上述函数 y_1 与 y_2 是线性无关的。

$\sin kx$，$\sin k(x-1)$在 $x=\xi$ 的 Wronski 行列式的值为

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin k\xi & \sin k(\xi-1) \\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1) \end{vmatrix} = k[\sin k\xi\cos k(\xi-1) -$$

$$\cos k\xi\sin k(\xi-1)] = k\sin[k\xi - k(\xi-1)] = k\sin k$$

方程的系数 $p(x)=1$，于是 $p(\xi)=1$，由式(12)可得

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin kx\sin k(\xi-1)}{k\sin k} & (0 < x \leqslant \xi) \\ -\dfrac{\sin k\xi\sin k(x-1)}{k\sin k} & (\xi \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

附录 6 Green 函数表

微分算子	边界条件	Green 函数 $G(x,\xi)$ $x\leqslant\xi$，当 $\xi<x$ $G(x,\xi)=G(\xi,x)$
y''	$y(0)=y(1)=0$	$x(1-\xi)$
y''	$y(0)=y'(1)=0$	x
y''	$y'(0)=y(1)=0$	$1-\xi$
y''	$y'(0)=y'(1)=0$	* $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(x^2+\xi^2)-\xi$
y''	$y(0)=0$ $y(1)-y'(1)=0$	* $\frac{x^3\xi}{2}+\frac{x\xi^3}{2}-\frac{9}{5}x\xi+x$
y''	$y(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0$	$\frac{x(2-\xi)}{2}$
y''	$y(0)=y(1)$ $y'(0)=y'(1)$	* $\frac{(x-\xi)^2}{2}-\frac{1}{2}\lvert x-\xi\rvert+\frac{1}{12}$
y''	$y(0)+y(1)=0$ $y'(0)+y'(1)=0$	$\frac{1}{2}(x-\xi)+\frac{1}{4}$
y''	$y(0)=y'(0)$ $y(1)=y'(1)$	$-(x+1)\xi$
y''	$y(0)=y'(1)$ $y'(0)=y(1)$	$x(2-\xi)+1-\xi$
y''	$y(-1)=y(1)=0$	$\frac{1}{2}(1+x)(1-\xi)$
y''	$y(-1)+y(1)=0$ $y'(-1)+y'(1)=0$	* $\frac{1}{4}(x-\xi)^2+\frac{1}{2}(x-\xi)+\frac{1}{6}$
$y''+y$	$y(0)=y(1)=0$	$\frac{\sin x\sin(1-\xi)}{\sin 1}$
$y''+y$	$y(0)=y'(1)=0$	x
$y''+y$	$y(0)=1,y'(1)=0$	x
$y''+y$	$y(1)=0,y'(0)=0$	$\frac{\sin(1-\xi)\cos x}{\cos 1}$
$y''+y$	$y(0)=y(1)$ $y'(0)=y'(1)$	$\frac{-\cos\left(x-\xi+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$
$y''+y$	$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$\sin x\cos\xi$
$y''+k^2y$	$y(-1)=y(1)$ $y'(-1)=y'(1)$	$-\frac{\cos k(x-\xi+1)}{2k\sin k}$
$y''-y$	$y(0)=y(1)=0$	$\frac{\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(1-\xi)}{\operatorname{sh} 1}$

微分算子	边界条件	Green 函数 $G(x,\xi)$　$x\leqslant\xi$，当 $\xi<x$　$G(x,\xi)=G(\xi,x)$
$y''-y$	$y'(0)=y'(1)=0$	$\dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(1-\xi)}{\operatorname{sh} 1}$
$y''-y$	$y(0)=y(1)$ $y'(0)=y'(1)$	$\dfrac{e^{x-\xi+1}e^{\xi-x}}{2(1-e)}$
$y''-y$	$y(0)=y'(0)$ $y(1)+y'(1)=0$	$\dfrac{1}{2}e^{-\lvert x-\xi\rvert}$
$y''-k^2y$	$y(0)=y(1)=0$	$\dfrac{\operatorname{sh} kx\operatorname{sh} k(1-\xi)}{k\operatorname{sh} k}$
$y''-k^2y$	$y(-1)=y(1)$ $y'(-1)=y'(1)$	$\dfrac{\operatorname{ch} k(x-\xi+1)}{2k\operatorname{sh} k}$
$y''+xy$	$y(0)=0$, $y(1)=1$	$x(1-\xi)$
$\dfrac{d}{dx}[(1-x^2)y']-\dfrac{n^2}{1-x^2}y$	$\lim\limits_{x\to\pm1}\lvert y(x)\rvert<\infty$	$\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{n/2}$　$n=1,2,\cdots$
$\dfrac{d}{dx}[(1-x^2)y']$	$\lim\limits_{x\to\pm1}\lvert y(x)\rvert<\infty$	$-\dfrac{1}{2}\ln\lvert1-x\rvert\lvert1+\xi\rvert+\ln2-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{d}{dx}[xy']-\dfrac{n^2}{x}y$	$y(0)=y(1)=0$	$\dfrac{x^n}{2n\xi^n}(1-\xi^{2n})$　$(n=1,2,\cdots)$
$\dfrac{d}{dx}[xy']-\dfrac{n^2}{x}y$	$\lvert y(0)\rvert<\infty$, $y(1)=0$	$\dfrac{x^n}{2n\xi^n}(1-\xi^{2n})$　$(n=1,2,\cdots)$
$xy''+y'$	$\lvert y(0)\rvert<\infty, y(1)=0$	$-\ln\xi$
$xy''+y'$	$\lvert y(0)\rvert<\infty$, $y(1)=y'(1)$	$-\ln\xi-1$
y''	$y(0)=y(1)=0$ $y'(0)=y'(1)$	$-\dfrac{1}{2}x(\xi-x)(1-\xi)$
$y^{(4)}$	$y(0)=y'(0)=0$ $y(1)=y'(1)=0$	$\dfrac{x^2(1-\xi)^2}{6}(2x\xi+x-3\xi)$
$y^{(4)}$	$y(0)=y'(0)=0$ $y(1)=y''(1)=0$	$\dfrac{1}{12}[-x^3\xi^3+3x^2\xi^2(x+\xi)-9x^2\xi^2+2x^2(3\xi-x)]$
$y^{(4)}$	$y(0)=y'(0)=0$ $y''(1)=y'''(1)=0$	$\dfrac{x^2}{6}(3\xi-x)$
$y^{(4)}$	$y(0)=y''(0)=0$ $y(1)=y''(1)=0$	$\dfrac{1}{6}x(\xi-1)(x^2+\xi^2-2\xi)$
$\dfrac{d}{dx}[a(x)y'(x)]$, $a(x)\neq0$ $A(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{a(t)}dt$	$y(0)=y(1)=0$	$A(x)\left[1-\dfrac{A(t)}{A(1)}\right]$
$\dfrac{d}{dx}[a(x)y'(x)]$ $a(x)\neq0$	$y(0)=y'(1)=0$	$A(x)$
$\dfrac{d}{dx}[a(x)y'(x)]$ $a(x)\neq0$	$y(0)=y(1)+cy'(1)$ $c>0$	$A(x)-\dfrac{A(x)A(t)a(1)}{c+A(1)a(1)}$

注：加 * 号者系广义 Green 函数；其他区间的 Green 函数可利用变量变换由本表得出。

附录 7　Euler 积分

为了表示某些积分方程的解，需要引入两类 Euler 积分：**Gamma 函数**(第二类 Euler 积分)及 **Beta 函数**(第一类 Euler 积分)。

1．Gamma 函数

定义

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

式中 x 为任意复数，Re$x>0$，于是

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{2}$$

对式(1)分部积分，可得

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^{(x+1)-1} dt$$

即

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{3}$$

利用(3)式，可确定 $x<0$、$x\neq-1$、-2、…时 Gamma 函数的值。

由式(3)可得

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{4}$$

因此可得自然数的 Gamma 函数值

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

由于

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

作自变量的代换 $x=t^{1/2}$，可得

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt = \sqrt{\pi}$$

即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

再由式(4)，就有

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

一般地

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

式中 $n=0,\ 1,\ \cdots$。

类似地可得到

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

不难验证

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\cdots=\Gamma(-n)=\cdots=\infty$$

对于 Gamma 函数，成立下列关系

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x} \tag{5}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\pi^{1/2}\Gamma(2x)$$

更一般的，成立 **Gauss-Legendre 乘法定理**

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{1/2-nx}\Gamma(nx)$$

此外，还成立

$$\frac{1}{\Gamma(z)}e^{\gamma z}z\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right]$$

两边取对数，得

$$-\ln\Gamma(z)=\gamma z+\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right]$$

再求导

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\gamma+\frac{1}{z}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{z}{k}\right)-\frac{z}{k}\right]\Big\}'$$

$$=\gamma+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right)$$

式中 γ 为 **Euler 常数**。

2. Beta 函数

定义

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\ \mathrm{Re}p>0,\ \mathrm{Re}q>0 \tag{6}$$

称为 **Beta 函数**，可以用下列公式由 Gamma 函数表示

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{7}$$

附录 8　Mellin 变换表

$f(t)$	$M(s)$	收敛条件
$\delta(t-a)$	a^{s-1}	
$H(t-a)$	$-\dfrac{a^s}{s}$	
$H(a-t)$	$\dfrac{a^s}{s}$	
$x^n H(t-a)$	$-\dfrac{a^{s+n}}{s+n}$	
$x^n H(a-t)$	$\dfrac{a^{s+n}}{s+n}$	
e^{-at}	$a^{-s}\Gamma(s)$	Re $a>0$，Re $s>0$
e^{-t^2}	$\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}s\right)$	
$\sin t$	$\Gamma(s)\sin\dfrac{1}{2}\pi s$	$-1<$ Re $s<1$
$\cos t$	$\Gamma(s)\cos\dfrac{1}{2}\pi s$	$0<$ Re $s<1$
$\dfrac{1}{1+t}$	$\pi\csc\pi s$	
$\dfrac{1}{1-t}$	$\pi\cot\pi s$	
$\dfrac{1}{(1+t)^a}$	$\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$	Re $a>0$
$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\dfrac{1}{2}\pi\csc\dfrac{1}{2}\pi s$	
$(1-t)^{a-1}H(1-t)$	$\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(a)}{\Gamma(s+a)}$	Re $a>0$
$(t-1)^a H(t-1)$	$\dfrac{\Gamma(a-s)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-s)}$	$0<$ Re $a<1$
$\ln(1+t)$	$\dfrac{\pi}{s}\csc\pi s$	$-1<$ Re $s<0$
$\arctan t$	$-\dfrac{1}{2}\pi s^{-1}\sec\dfrac{\pi}{2}s$	$-1<$ Re $s<0$
$\operatorname{arccot} t$	$\dfrac{1}{2}\pi s^{-1}\sec\dfrac{\pi}{2}s$	$0<$ Re $s<1$
$\operatorname{erfc} t$	$\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{s+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}s}$	Re $s>0$
$\sin t$	$-\dfrac{\Gamma(x)\sin\dfrac{\pi s}{2}}{s}$	$-1<$ Re $s<0$

附录 9　Hilbert 变换与有限 Hilbert 变换

1. Hilbert 变换

定义在$(-\infty,\infty)$的函数 $f(\tau)$的 **Hilbert 变换**是

$$F(t)=\mathscr{H}\{f(\tau)\}=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

式中积分是 Cauchy 主值意义下的广义积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

$F(t)$的 **Hilbert 逆变换**是

$$f(\tau)=\mathscr{H}^{-1}\{F(t)\}=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

式中积分亦是在主值意义下的广义积分.

由主值积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos bx\mathrm{d}x}{x-t}=-\pi\sin bt \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin bt\mathrm{d}t}{t-x}=\pi\cos bx \tag{5}$$

可知
$$\mathscr{H}\{\cos bx\}=\sin bt,\ \mathscr{H}^{-1}\{\sin bt\}=\cos bx$$

由式(8.2-13)、(8.2-14)，可得

$$\mathscr{H}\{\mathscr{H}\{\varphi\}\}=\quad\varphi \tag{6}$$

利用 Hilbert 变换可以得到某种第二类奇异积分方程解的表达式。

例 1　解方程

$$\varphi(t)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=g(t)$$

式中 $g(t)$为已知函数。

解　把上列方程记为

$$\varphi(t)+\lambda\pi\mathscr{H}\{\varphi(\tau)\}=g(t) \tag{7}$$

式(7)两端作 Hilbert 变换，并利用式(6)，得

$$\mathscr{H}\{\varphi(\tau)\}-\lambda\pi\varphi(t)=\mathscr{H}\{g(\tau)\} \tag{8}$$

由式(7)、(8)

$$(1+\lambda^2\pi^2)\varphi(t)=g(t)-\lambda\pi\mathscr{H}\{g(\tau)\}$$

于是得到方程的解为

$$\varphi(t)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[g(t)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right]$$

2. 有限 Hilbert 变换

积分限为有限的变换

$$F(\theta)=\mathscr{H}\{f\}=\frac{-1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{9}$$

称为**有限 Hilbert 变换**。它的逆变换为

$$f(\varphi)=\mathscr{H}^{-1}\{F\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\cos\varphi}F(\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10}$$

以上两式中的积分均是 Cauchy 主值积分。

下列主值积分公式

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi\sin n\theta}{\sin\theta}\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{11}$$

在有限 Hilbert 变换中很有用，可用来解积分方程。

例 2 解 $\varphi(t)$的以下两个奇异积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=\sin 2t \tag{12}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\varphi(\tau)}{\cos\tau-\cos t}\mathrm{d}\tau=1 \tag{13}$$

解 方程(12)、(13)分别是形如(1)的 Hilbert 变换及形如(9)的有限 Hilbert 变换。由式(4) 看出，方程(12)是式(4)当 $b=2$ 时的特殊情况，因此方程(12)的解为

$$\varphi(t)=-\frac{1}{\pi}\cos 2t$$

同理，由式(11)可看出，方程(13)是式(11)当 $n=1$ 时的特殊情况，因此方程(13)的解为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\cos t$$

附录 10　Cauchy 型积分及其性质

1. Cauchy 型积分的定义与性质

设 L 是复平面上一条有向、光滑的封闭或非闭的曲线，D^+、D^-分别为 L 内部、L 外部的区域，设 $\varphi(t)$在 L 上连续。如果积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{1}$$

存在，则称此积分为以 $\varphi(\tau)$为核(密度)的 **Cauchy 型积分**。

如果 $\varphi(t)$在 L 上连续，且是某个在 D^-(或 D^-)解析的函数 $\Phi(z)$的极限值，则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \qquad z \overline{\in} L$$

为 **Cauchy 积分**。由定义知，Cauchy 积分是 Cauchy 型积分的特殊情况。

性质 1　Cauchy 型积分(1)是在区域 D^+ 及 D^- 内解析的函数(分别用 $\Phi^+(z)$、$\Phi^-(z)$表示)，因而当 $z \overline{\in} L$ 时确定了惟一的分片解析函数

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & z \in D^+ \quad z \overline{\in} L \\ \Phi^-(z) & z \in D^- \quad z \overline{\in} L \end{cases}$$

且有

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^2}d\tau \tag{2}$$

证明　设 $z+\Delta z$ 与 z 同时属于 D^+ 或同时属于 D^-，于是

$$\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left(\frac{1}{\tau - (z+\Delta z)} - \frac{1}{\tau - z}\right)\frac{\varphi(\tau)}{\Delta z}\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{1}{[\tau - (z+\Delta z)](\tau - z)}d\tau$$

设极限与积分号交换顺序的条件得以满足，利用极限与积分运算交换顺序可得到

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{1}{[\tau - (z+\Delta z)](\tau - z)}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\lim_{\Delta z \to 0}\frac{1}{[\tau - (z+\Delta z)](\tau - z)}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\frac{1}{(\tau - z)^2}d\tau$$

由于上式最后一项积分存在，因此当 $z \neq \tau$ 时，$\Phi(z)$在 D^+ 及 D^- 是解析的。

性质 2　$\Phi(\infty)=0$

证明　由于在∞附近有

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1 - \frac{\tau}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\tau^{n-1}}{z^n}\right)$$

于是
$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(\tau)\left[\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\tau^{n-1}}{z^n}\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{-n}$$
式中
$$c_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(\tau)\tau^{n-1}d\tau,\ 因此\ \Phi(\infty)=0。$$

例 设 L 是单位圆 $|\tau|=1$，$\varphi(\tau)=\frac{2+\tau^4}{\tau^3}$

则 Cauchy 型积分
$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2+\tau^4}{\tau^3(\tau-z)}d\tau=\begin{cases} z & |z|<1\\ \frac{2}{z^3} & |z|>1\end{cases}$$
是一个由分别在圆内、圆外解析的函数 z、$-\frac{2}{z^3}$组成的分片解析函数。

2. Cauchy 型积分的主值

当 $\tau=z$ 时，Cauchy 型积分(1)有奇性。为此，可以按实函数定积分主值相类似的方式来定义 **Cauchy 型积分的主值**。

以 z 为圆心，充分小的正数 δ 为半径作圆，交 L 于 z_1、z_2 两点，令$\widehat{z_1zz_2}$为 l。

当 $\delta\to0$ 时，若积分 $\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ 的极限值$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ 存在，则称此极限值为 Cauchy 型积分(1)的主值，$\frac{1}{\tau-z}$就是 **Chauchy 核**。

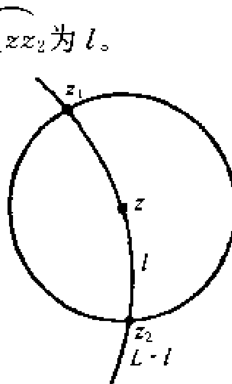


图 1

在讨论 Cauchy 核奇异积分方程时所出现的上述形式的积分，都理解为 Cauchy 主值积分。

在考虑一般的奇异积分 $\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ 的主值之前，先讨论 $\varphi(\tau)=1$ 的特殊情形。

由于
$$\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-z}=\int_a^{z_1}\frac{d\tau}{\tau-z}+\int_{z_2}^{b}\frac{d\tau}{\tau-z}=\ln(\tau-z)\Big|_a^{z_1}+\ln(\tau-z)\Big|_{z_2}^{b}$$
$$=\ln\left(\frac{b-z}{a-z}\right)-\ln\left(\frac{z_2-z}{z_1-z}\right)$$
而
$$\ln\left(\frac{z_2-z}{z_1-z}\right)=\ln\left|\frac{z_2-z}{z_1-z}\right|+i[\arg(z_2-z_1)-\arg(z_1-z)]$$
由于
$$\lim_{\delta\to0}\left|\frac{z_2-z}{z_1-z}\right|=1$$
所以
$$\lim_{\delta\to0}\ln\left(\frac{z_2-z}{z_1-z}\right)=\lim_{\delta\to0}i[\arg(z_2-z)-\arg(z_1-z)]=-i\pi$$
因此
$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}=\lim_{\delta\to0}\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-z}=\ln\left(\frac{b-z}{a-z}\right)+\pi i=\ln\frac{b-z}{z-a}\tag{3}$$
当 L 为闭曲线，即 $a=b$ 时
$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}=\pi i\tag{4}$$

以下讨论奇异积分 $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$ 的主值，设密度 $\varphi(\tau) \in H(\lambda)$，由于

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(z)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau + \varphi(z)\int_L \frac{1}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$$

上式右端第一项作为通常的广义积分是收敛的，因而主值积分存在：而第二项为 $\varphi(z) \times \left[\ln\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \pi i\right]$，因此 $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau$ 的 Cauchy 主值存在，且有

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(z)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau + \varphi(z)\left[\ln\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \pi i\right]$$

当 L 为闭曲线，即 $a=b$ 时，就有

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(z)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau + \pi i\varphi(z) \tag{5}$$

8. Cauchy 型积分的极限值 Plemelj-Sokhotskii 公式

以下讨论 Cauchy 型积分所表示的 $\Phi^+(z)$、$\Phi^-(z)$当 z 分别从 D^+ 或从 D^-趋于 L 上点 t 的极限值 $\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$。

设 t 为 L 上的点，考虑

$$\psi_t(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

设 z 位于与 L 相交的一条直线上，直线与 L 的交点为 t。

以下证明极限值 $\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$及 L 上的函数值 $\psi_t(t)$均存在。

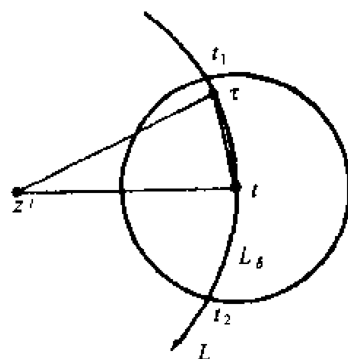


图 2

考虑下列差

$$\psi_t(z) - \psi_t(t) = \int_L (z - t)\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau$$

把围道 L 分为 $L-L_\delta$ 及 L_δ 两部分，L_δ 为连接 t_1、t_2 两点的劣弧。并相应地把积分表示为两部分之和，即沿 L_δ 的积分 I_1 与沿弧 $L-L_\delta$ 的积分 I_2 之和。为了简单起见，只讨论点 z 沿非切向趋近于 L 的情况。在这种情况下，角 ω 恒大于某一个角 $\omega_0>0$，显然成立下列不等式

$$\left|\frac{z-t}{\tau - z}\right| \geqslant \frac{1}{\sin\omega_0} = K$$

由 $\varphi(\tau)$满足 Hölder 条件，得到

$$\left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\right| < Ar^{\lambda-1} \qquad r = |\tau - t|$$

由于围道 L 是光滑的，所以存在一个大于 $\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r}\right|$ 的常数 m。

以下用不等式来估计积分 I_1

$$|I_1| \leqslant \int_{L_\delta} \frac{|z-t|}{|\tau - z|}\left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\right||\mathrm{d}\tau| < KAm\int_{L_\delta} r^{\lambda-1}|\mathrm{d}r|$$

$$= 2KAm\int_0^\delta r^{\lambda-1}\mathrm{d}r = \frac{2KAm\delta^\lambda}{\lambda}$$

只要把 δ 的值取得充分小，就可以使积分 I_1 小于任意预先给定的正数 ε。

为了估计 I_2，由积分的连续性，可以选取充分接近于点 t 的点 z，使得 $|I_2|<\varepsilon$，这样就得到以下估计

$$|I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

因此可知，函数 $\psi_t(z)$ 是连续的，这样就证明了下列等式

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}} \psi_t^+(z) = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}} \psi_t^-(z) = \psi_t(t) \tag{7}$$

式中 $\psi_t(t)$ 是积分(6)在 L 上的函数值，即把 $z=t$ 代入所得到的值。

由于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 1 & z \in D^+ \\ 0 & z \in D^- \end{cases}$$

而由式(4)可知，当 $z\in L$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2}$$

于是

$$\psi_t^+(t) = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^+}} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right\}$$

$$= \Phi^+(t) - \varphi(t)$$

$$\psi_t^-(t) = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^-}} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z}\right\}$$

$$= \Phi^-(t)$$

$$\psi_t(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

$$= \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)$$

再由式(7)就有

$$\psi_t(t) = \Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)$$

上式消去辅助的连续函数 $\psi_t(t)$，就以可得到下列重要的 **Plemelj-Sokhtskii 公式**：

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \dfrac{1}{2}\varphi(t) + \Phi(t) = \dfrac{1}{2}\varphi(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \\ \Phi^-(t) = \Phi^+(t) - \varphi(t) = -\dfrac{1}{2}\varphi(t) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \end{cases} \tag{8}$$

或

$$\begin{cases} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \end{cases} \tag{9}$$

由 Plemelj-Sokhtskii 公式可直接得出 $\Phi^\pm(t)$ 是连续函数。

4. Plemelj-Privalov 定理

定理 设 L 是一条逐段光滑的有向闭曲线，在 L 上 $\varphi(t)\in H(\lambda)$，则 Cauchy 型积分

$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ 在 L 上的极限值 $\Phi^+(t)$ 与 $\Phi^-(t)$ 也满足 Holder 条件，当 $\lambda<1$ 时，这些极限值与 $\varphi(t)$ 有相同的 Hölder 指数 λ；当 $\lambda=1$ 时，这些函数的 Hölder 指数为 $1-\varepsilon$，ε 为任意小于 1 的正数。

证明 由 Plemelj-Sokhtskii 公式，有

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$
$$= \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

因此，只要对函数 $\psi_t(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}d\tau$ 来证明这个定理就可以了。

设 t_1 与 t_2 是任意两个充分接近的点，作估计

$$\psi_{t_2}(t_2) - \psi_{t_1}(t_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right]d\tau$$

由于假设围道 L 为光滑的，因此有

$$s(t_1, t_2) \leqslant m_1|t_2 - t_1| \tag{10}$$

式中 $s(t_1,t_2)$ 是 L 在点 t_1 与点 t_2 之间劣弧的长；m_1 为正数。

再在 L 上点 t_1 的两边划分出长度各为 $2s(t_1,t_2)$ 的弧 L_1，端点分别为 a 与 b，于是有

$$\psi_{t_2}(t_2) - \psi_{t_1}(t_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}d\tau +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_1}\left[\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right]d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}d\tau +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_1} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{\tau - t_1}d\tau +$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_1} \frac{[\varphi(\tau) - \varphi(t_2)](t_2 - t_1)}{(\tau - t_1)(\tau - t_2)}d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

由于 $\varphi(t)$ 满足 Hölder 条件及式(10)，对 I_1 有估计

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2}\right||d\tau| \leqslant c_1\int_{L_1}\frac{|dt|}{|\tau - t_2|^{1-\lambda}}$$
$$\leqslant c_2\int_0^{|t_2 - t_1|}\frac{ds}{s^{1-\lambda}} \leqslant c_3 s^{\lambda}(t_1, t_2) \leqslant A_1|t_2 - t_1|^{\lambda}$$

类似地可得到

$$|I_2| \leqslant A_2|t_2 - t_1|^{\lambda}$$

以下再来估计 I_3

$$|I_3| \leqslant \frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{2\pi}\left|\int_{L-L_1}\frac{d\tau}{\tau - t_1}\right| \leqslant \frac{A|t_2 - t_1|^{\lambda}}{2\pi}\left|\int_{L-L_1}\frac{d\tau}{\tau - t_1}\right|$$

上式右端的积分为

$$\int_{L-L_1}\frac{d\tau}{\tau - t_1} = \ln\frac{a - t_1}{b - t_1}$$

它对 L 上任意点 t_1 是有界的，因此

$$|I_3| \leqslant A_3|t_2-t_1|^{\lambda}$$

最后估计 I_4

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leqslant A\frac{|t_2-t_1|}{2\pi}\int_{L-L_1}\frac{ds}{|\tau-t_1||\tau-t_2|^{1-\lambda}} \\
&\leqslant A'|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s(t_1,\tau)s^{1-\lambda}(t_2,\tau)} \\
&= A'|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s^{2-\lambda}(t_1,\tau)\left(\dfrac{s(t_2,\tau)}{s(t_1,\tau)}\right)^{1-\lambda}}
\end{aligned}$$

而 $s(t_2,\tau)=s(t_1,\tau)-s(t_1,t_2)$，因此

$$\frac{s(t_2,\tau)}{s(t_1,\tau)}=1-\frac{s(t_1,t_2)}{s(t_1,\tau)}$$

由弧 L_1 的作法可得$\dfrac{s(t_1,t_2)}{s(t_1,\tau)}\leqslant\dfrac{1}{2}$，于是$\dfrac{s(t_2,\tau)}{s(t_1,\tau)}\geqslant\dfrac{1}{2}$。因此

$$|I_4|\leqslant A''|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s^{2-\lambda}(t_1,\tau)}$$

当 $\lambda<1$ 时，由 L_1 的作法及不等式(10)，可得

$$|I_4|\leqslant A_4|t_2-t_1|^{\lambda}$$

当 $\lambda=1$ 时，则有

$$|I_4|\leqslant A_4'|t_2-t_1|\,|\ln|t_2-t_1||\leqslant A_4''|t_2-t_1|^{1-\varepsilon}\qquad(\varepsilon>0)$$

由以上关于 I_1，I_2，I_3，I_4 的估计，而当 $\lambda=1$ 时，I_1，I_2，I_3 的估计式中指数都可以换为$1-\varepsilon$，这样就证明了上述 Plemelj-Privalov 定理。

5．Poincaré-Bertrand 公式

以下证明可以用来解决 Cauchy 主值积分交换积分顺序问题的、著名的 **Poincaré-Bertrand 公式**。

首先考虑当其中一个积分是通常积分，另一个积分是 Cauchy 主值积分的情况，成立

引理 设 L 是光滑、可求长的闭曲线，$\varphi(\tau,\tau_1)$关于 τ，τ_1 满足 Hölder 条件，函数$\omega(\tau,z)$对某一集合中的 z 的值关于 τ 可积，则

$$\int_L\omega(\tau,z)d\tau\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=\int_L d\tau_1\int_L\frac{\omega(\tau,z)\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau\tag{11}$$

证明 记式(11)左端的函数为 $I(z)$

$$I(z)=\int_L\omega(\tau,z)d\tau\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1\tag{12}$$

而式(11)右端记为 $I_2(z)$

$$I_2(z)=\int_L d\tau_1\int_L\frac{\omega(\tau,z)\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau\tag{13}$$

在积分 $I(z)$中，把关于变量 τ_1 的积分的积分围道 L 分为两部分：一部分为 l，它是在 L 上由一个以点 $\tau_1=\tau$ 为圆心、以 δ 为半径的圆周所包围的那一段弧，它的端点为 τ'，τ''；另一部分为去掉 l 余下的那一段弧，记为 $L-l$。对于积分 $I_1(z)$，以同样的方式把 L 分为两部分，

圆心取在点 $\tau=\tau_1$。

记
$$I = I_0 + I_\delta$$

式中
$$I_0 = \int_L \omega(\tau,z)\mathrm{d}\tau\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1$$
$$I_\delta = \int_L \omega(\tau,z)\mathrm{d}\tau\int_{L}\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1$$

用类似的方式把积分 I_1 分为两部分
$$I_1 = I_{10} + I_{1\delta}$$

累次积分 I_0、I_{10}是通常的积分，交换积分顺序是允许的，因而
$$I_0 = I_{10}$$

如果用弧坐标 s 与 $s_1(0\leqslant s\leqslant a, 0\leqslant s_1\leqslant a, a$ 为 L 的弧长)来确定围道 L 上点 τ 与 τ_1 的位置，并把它们考虑为辅助平面 oss_1 上点的直角坐标，上述等式成立就很明显。此时对于积分 I_0 和 I_{10}的积分区域，将是边长为 a 的正方形去掉沿对角线方向两侧宽度为 δ(δ 为一个小的数）的带形，在此区域内被积函数没有奇点，I_0 与 I_{10}作为通常的积分，可以交换积分顺序。

由于
$$|I - I_1| = |I_\delta - I_{1\delta}| \leqslant |I_\delta| + |I_{1\delta}|$$

以下分别来估计 I_δ 与 $I_{1\delta}$。对于 I_δ 中关于 τ_1 的积分，有
$$\int_l \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1 = \int_l \frac{\varphi(\tau,\tau_1)-\varphi(\tau,\tau)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1 + \varphi(\tau,\tau)\int_l\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\tau_1-\tau}$$

上式中第一个积分是广义积分，在(3)中已讨论过这种形式的积分，对于任意给定的正数 ε，当 δ 充分小时，可使得它小于$\frac{\varepsilon}{4M}$，其中
$$M = \max\left|\int_L \omega(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right|$$

由于 τ'、τ''为 l 的端点，由公式(3)
$$\int_l \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_1-\tau} = \ln\frac{\tau''-\tau}{\tau-\tau'} = \mathrm{i}[\arg(\tau''-\tau)-\arg(\tau-\tau')] = \mathrm{i}\alpha$$

式中 α 是割线之间的夹角。

对于充分小的 δ，由曲线的光滑性，角 α 可以充分小，因而有
$$\left|\varphi(\tau,\tau)\int_l\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\tau_1-\tau}\right| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

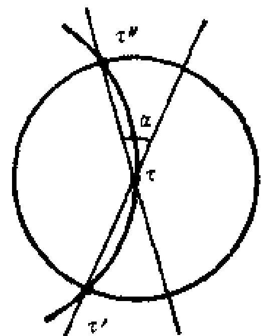


图 3

于是
$$|I_\delta| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_L \omega(\tau,z)\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

对于积分 $I_{1\delta}$，成立类似的估计
$$|I_{1\delta}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由于 $I_0=I_{10}$，因此
$$|I - I_1| = |I_\delta - I_{1\delta}| < |I_\delta| + |I_{1\delta}| < \varepsilon$$

因 $I-I_1$ 显然不依于 δ，所以
$$I = I_1$$

即式(11)成立。

下面考虑两个积分都是奇异积分的情况。

定理 设L是一条光滑、可求长的闭曲线，函数$\varphi(\tau,\tau_1)$关于变量τ,τ_1满足Hölder条件，则成立下列**Poincaré-Bertrand公式**

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$
$$=-\pi^2\varphi(t,t)+\int_L d\tau_1\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau \tag{14}$$

证 记

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau$$

$$I_1(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau$$

以上两个积分都有意义，为了验证这一事实，引入辅助函数

$$\sigma(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$

式中$\varphi(\tau,\tau_1)$是一个含两个自变量的函数。由Plemelj-Privalov定理，函数$\sigma(\tau)$是Hölder连续的，因此它的Cauchy型积分存在，即$I(t)$有意义。

对于积分$I_1(t)$，利用

$$\frac{1}{(\tau-1)(\tau_1-\tau)}=\frac{1}{\tau_1-t}\left\{\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\tau_1}\right\}$$

并引入辅助函数

$$\omega(\zeta,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\zeta}d\tau$$

于是
$$I_1(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t,\tau_1)-\omega(\tau_1,\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1$$

由Plemelj-Privalov定理，$\omega(\zeta,\tau_1)$满足Hölder条件，因此广义积分$I_1(t)$存在。

再把积分$I(t)$和$I_1(t)$扩充定义到变量z的平面(即把t换为z)，把这些积分记为$I(z)$与$I_1(z)$，由前述引理，$I(z)=I_1(z)$，因此显然有

$$I^+(t)=I_1^+(t),\ I^-(t)=I_1^-(t)$$

再由Plemelj-Sokhotskii公式，可得

$$I(t)=\frac{1}{2}[I^+(t)+I^-(t)]=\frac{1}{2}[I_1^+(t)+I_1^-(t)] \tag{15}$$

引入辅助函数

$$\psi(z,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau$$

于是

$$I_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-z}\frac{1}{\pi i}\left\{\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-z}d\tau-\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(z,\tau_1)}{\tau_1-z}d\tau_1$$

注意到密度函数在围道不同侧的极限值是不同的，以下先确定极限值$I_1^+(t)$与$I_1^-(t)$，并

把它们相加，得

$$\frac{1}{2}[I_1^+(t)+I_1^-(t)]=\frac{1}{2}[\psi^+(t,t)-\psi^-(t,t)]+$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi^+(t,\tau_1)+\psi^-(t,\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1 \tag{16}$$

再用 Plemelj-Sokhotskii 公式把上式右端变形

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t,t)-\psi^-(t,t)]=\varphi(t,t) \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t,\tau_1)-\psi^-(t,\tau_1)]=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau$$
$$=\frac{t-\tau_1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)}d\tau \tag{18}$$

由式(15)、(16)、(17)、(18)就可推出所需要的 Poincaré-Bertrand 公式

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$
$$=-\pi^2\varphi(t,t)+\int_L d\tau_1\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau \tag{19}$$

特别是，当密度函数 φ 仅是一个自变量 τ_1 的函数时，可以证明式(19)右端的积分为零，于是有

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau=-\pi^2\varphi(t) \tag{20}$$

附录 11　Riemann 问题

设 L 是平面上一条光滑闭曲线，$G(t)$（$G(t)\neq 0$）及 $g(t)$ 是在 L 上定义的已知函数，且满足 Hölder 条件，D 为 L 所围的（有界）区域。

所谓 **Riemann 问题**是，寻求一个分片的解析函数 $\Phi(z)$（以 L 为间断线），使得它的（分别从 L 所围区域 D 内、外趋于边界 L 时的）极限值满足

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t) \tag{1}$$

式中 $G(t)$ 称为 Riemann 问题的**系数**；$g(t)$ 称为**自由项**，当 $g(t)=0$ 时，称为**齐次 Riemann 问题**。

$G(t)$ 的指标，称为对应 Riemann 问题的**指标**。对于在 L 上不为零的连续函数 $G(t)$，它的指标（记为 $\mathrm{ind}G(t)$）κ 定义为按逆时针方向绕 L 一周时，函数 $G(t)$ 的幅角的增量除以 2π，即

$$\kappa\equiv \mathrm{ind}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\ln G(t)]_{L} \tag{2}$$

κ 亦可用积分形式来表示

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\int_{L}\mathrm{d}\,\arg G(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\mathrm{d}\,\ln G(t) \tag{3}$$

由于函数 $G(t)$ 是连续的，它的幅角的增量必定是 2π 的整数倍，因此指标总是整数。由式(3)可得到：两个函数乘积的指标等于各因子指标之和；而商的指标等于分子与分母指标之差。

当函数 $G(t)$ 可微，且是一个解析函数（从 L 所围区域 D 内或从区域 D 外趋近于边界 L）的极限值时，由等式

$$\kappa=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\mathrm{d}\,\ln G(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\frac{G'(t)}{G(t)}\mathrm{d}t \tag{4}$$

可以证明，指标 κ 的绝对值等于以 $G(t)$ 为边界值的函数之零点的个数（由于式(4)右端的积分是 $G(t)$ 的对数留数）。当函数 $G(t)$ 是一个解析函数（从 D 内趋近于边界）的极限值时，指标 κ 为正；否则为负。

对于 $G(t)=1$ 这种最简单的情况，由 Sokhotskii-Plemelj 公式可以得到，此时 Riemann 问题的解可以直接用 Cauchy 型积分表示为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\frac{g(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

先考虑齐次 Riemann 问题，设此问题是可解的，即存在一个不为零的解。把函数 $\Phi^{+}(z)$ 与 $\Phi^{-}(z)$ 的零点个数分别记为 N^{+} 与 N^{-}。由齐次 Riemann 问题所满足的条件

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t) \tag{6}$$

可得

$$N^{+}+N^{-}=\kappa \tag{7}$$

由于式(7)左端是一个非负数，因此立刻得到关于齐次 Riemann 问题可解性的下述结论：

i）为使齐次 Riemann 问题可解，指标必须是非负数；

ii）若 $\kappa>0$，则函数 $\Phi^{+}(z)$ 与 $\Phi^{-}(z)$ 总共有 κ 个零点；

iii）若 $\kappa=0$，则函数 $\Phi^{\pm}(z)$没有零点。

当 $\kappa=0$ 时，$\ln G(t)$是一个单值函数，函数 $\ln\Phi^{+}(z)$与 $\ln\Phi^{-}(z)$分别在 D^{+}与 D^{-}解析。对边界条件(4)取对数(同时对函数 $\ln G(t)$选取任一分支)，就得到关系

$$\ln\Phi^{+}(t)=\ln\Phi^{-}(t)+\ln G(t) \tag{8}$$

于是得到一个以 $G_1(t)=1$ 为系数的、关于函数 $\ln\Phi(z)$的一个**非齐次 Riemann 问题**，由式(5)，它满足 $\ln\Phi^{-}(\infty)=0$ 的解可以表示为

$$\ln\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

记

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

这样齐次 Riemann 问题满足 $\Phi^{-}(\infty)=1$ 的解为

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(z)},\ \Phi^{-}(z)=\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(z)} \tag{11}$$

如果去掉 $\Phi^{-}(\infty)=1$ 的限制，则式(9)右端应加上一个任意常数，因而齐次 Riemann 问题的解将为

$$\Phi^{+}(z)=A\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(z)},\ \Phi^{-}(z)=A\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(z)} \tag{12}$$

因为 $\Gamma^{-}(\infty)=0$，所以 $A=\Phi^{-}(\infty)$。这样，在 $\kappa=0$ 时，如果 $\Phi^{-}(\infty)\neq0$，则解包含一个任意常数；如果 $\Phi^{-}(\infty)=0$，则 $A=0$，于是问题仅有恒为零的平凡解。这样，可以得到下列结论：设 $G(t)$是一个在闭曲线 L 上 Hölder 连续的已知函数，它的指标为零，则它可以表示为分别在 D^{+}与 D^{-}(除去∞)解析且在这些区域不为零的函数 $\Phi^{+}(z)$与 $\Phi^{-}(z)$的极限值 $\Phi^{+}(t)$与 $\Phi^{-}(t)$的商，而 $\Phi^{+}(z)$与 $\Phi^{-}(z)$由式(12)给出。

当 $\kappa>0$ 时，可以把边界条件(6)改写为

$$\Phi^{+}(t)=t^{\kappa}[t^{-\kappa}G(t)]\Phi^{-}(t)=t^{\kappa}G_1(t)\Phi^{-}(t)$$

为了确定起见，假定原点在区域 D^{+}内，由于 t^{κ} 的指标为 κ，于是函数 $G_1(t)=t^{-\kappa}G(t)$的指标为零，由前面所进行的讨论，$G_1(t)$可以表示为

$$G_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(t)}}{\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(t)}}$$

式中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\ln[\tau^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau-z}\mathrm{d}\tau$$

因此边界条件(6)可以改写为

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(t)}}=\frac{t^{\kappa}\Phi^{-}(t)}{\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(t)}} \tag{13}$$

式(13)表明它的左端是一个在 D^{+}内解析的函数 $\Phi^{+}(z)/\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(z)}$的极限值，而右端是一个在 D^{-}内(除去∞)的解析的函数 $z^{\kappa}\dfrac{\Phi^{-}(z)}{\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(z)}}$的极限值(在$\infty$它有一个阶数不高于 κ 的极点)，通过 L 互相解析延拓。因而它们是同一解析函数的两个分支，此解析函数在全平面可能有惟一的奇点——在∞的不高于 κ 阶的极点。由复变函数论的广义 Liouville 定理可以得出，这个函数是次数不高于 κ 的、任意复系数的多项式。因此问题的一般解表示为

$$\Phi^{+}(z)=\mathrm{e}^{\Gamma^{+}(z)}P_{\kappa}(z)\quad \Phi^{-}(z)=\mathrm{e}^{\Gamma^{-}(z)}z^{-\kappa}P_{\kappa}(z) \tag{14}$$

式中 $P_\kappa(z)$是一个次数不高于 κ 的任意多项式(在解有一定物理意义的边值问题时,通常可以利用某些条件来惟一确定多项式 $P_\kappa(z)$)。因此,当 $\kappa>0$ 时,齐次 Riemann 问题有 $\kappa+1$ 个线性无关解,它的一般解依赖于 $\kappa+1$ 个任意常数。

在应用 Riemann 问题解奇异积分方程时,经常要寻求问题满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的解。由式(14)可知,$\Phi^-(\infty)$等于多项式 $P_\kappa(z)$中 z^κ 的系数。这样,在无穷远处等于零的 Riemann 问题的解具有下列形式

$$\Phi^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}P_{\kappa-1}(z),\ \Phi^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}z^{-\kappa}P_{\kappa-1}(z) \tag{15}$$

式中 $P_{\kappa-1}(z)$是任意系数的 $\kappa-1$ 次多项式,在这种情况下,Riemann 问题具有 κ 个线性无关解。

在讨论非齐次 Riemann 问题之前,先引入 Riemann 问题标准函数的概念。

形如

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\quad X^-(z)=z^{-\kappa}e^{\Gamma^-(z)}$$

的满足齐次边界条件(6)的分片解析函数 $X(z)$,式中 $\Gamma(z)$由式(10)确定,称为**Riemann 问题的标准函数**。当 $\kappa\geqslant 0$ 时,标准函数是齐次 Riemann 问题的特解,而通解可以记为

$$\Phi(z)=X(z)P_\kappa(z)$$

当 $\kappa<0$,标准函数亦满足边界条件(6),但在∞有一个$-\kappa$ 阶的极点,因而不是齐次问题的解,但在解非齐次问题时作为辅助函数使用。

引入标准函数的概念后,就可以把齐次问题可解性的结论推广到指标为任意数的函数。可以证明,满足 Hölder 条件且在闭曲线 L 上不为零的任一函数,可以表示为

$$\varphi(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)} \tag{16}$$

式中 $X(z)$是 Riemann 问题 $\Phi^+(t)=\varphi(t)\Phi^-(t)$的标准函数。

以下转入讨论非齐次 Riemann 问题的解,即求一个满足条件(1)的分片解析函数。

设函数 $G(t)$的指标为 κ,并设对应的齐次问题(即令 $g(t)=0$ 的问题)的标准函数为 $X(z)$,于是成立等式

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)} \tag{17}$$

而 $\Phi(z)$极限值的关系式可以表示为

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)} \tag{18}$$

考虑以下的辅助 Riemann 问题

$$\psi^+(t)=\psi^-(t)+\frac{g(t)}{X^+(t)} \tag{19}$$

它的解为

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{20}$$

把式(18)与式(19)两端分别相减,得

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\psi^+(t)=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}-\psi^-(t) \tag{21}$$

式(21)左端是一个在 D^+内解析的函数的极限值;右端是一个在 D^- 内解析(∞可以除外)的函

数的极限值($D^+=D$,D^-为全平面除去D^+的部分)。

当$\kappa<0$时,$\Phi^-(z)/X^-(z)$在∞为零,由于函数$\psi^-(z)$在∞亦为零,由Liouville定理可以得到结论:等式(21)两端的表达式恒等于零,于是得到

$$\Phi(z)=X(z)\psi(z) \tag{22}$$

然而,当$\kappa\geqslant0$时,$\Phi^-(z)/X^-(z)$是在D^-内(除去∞)处处解析的函数的极限值,它有一个κ阶的极点,因此由广义Liouville定理可得到结论:式(21)两端的表达式恒等于某个κ次多项式。在这种情况下,解为

$$\Phi(z)=X(z)[\psi(z)+P_\kappa(z)] \tag{23}$$

解(22)与(23)可以合并用(23)一个式子来表示,只要在$\kappa<0$时把$P_\kappa(z)$理解为0就可以了。

当$\kappa<0$时,需要对解作进一步的分析。函数$X(z)$在∞有一个$-\kappa$阶的极点,而函数$\psi(z)$一般有一个一阶零点。因此,与函数$\Phi(z)$相等的乘积$X(z)\psi(z)$在∞有一个$-\kappa-1$阶极点。这样,当$\kappa+1<0$时,非齐次Riemann问题不可解,只有当自由项满足某些能确保$\Phi(z)$在∞具有解析性的条件时才可解。

把函数$\psi(z)$展为级数

$$\psi^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^{-k}$$

式中

$$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau$$

显然,若$c_k=0(k=1,2,\cdots,-\kappa-1)$时,函数$\Phi(z)$在$\infty$是解析的。

综上所述,可以得到以下的

定理 非齐次Riemann问题(如果它可解)有一个由式(23)表示的解。当$\kappa\geqslant0$,Riemann问题永远可解;而当$\kappa<0$时,仅当下列条件

$$\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0 \quad (k=1,2,\cdots,-\kappa-1) \tag{24}$$

满足时可解。